

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
§ 1. Логарифмическая спираль	4
§ 2. Архимедова спираль	12
§ 3. Спирали Ферма, Галилея и «жезл»	21
§ 4. Клотоида	27
§ 5. Розы	33
§ 6. Циклоида	43
§ 7. Эпициклоида, кардиоида и улитка Паскаля	56
§ 8. Гипоциклоида, астроида и кривая Штейнера	70
§ 9. Парабола	77
§ 10. Трактриса	86
§ 11. Строфоида	92
§ 12. Цепная линия	97
Список литературы	109



ПРЕДИСЛОВИЕ

В процессе развития математики, в частности – ее разделов, связанных с решением различных практических задач механики, физики, естествознания и техники, периодически возникали задачи, решение которых тем или иным образом сводилось к исследованию формы и свойств плоских кривых. Одни из этих кривых находили применение в различных механизмах, деталях машин, строительных конструкциях, оптике, изобразительном искусстве и архитектуре, другие – проявлялись в различных физических и биологических явлениях в природе. Знакомство с такими кривыми, исследование их с помощью математических методов может оказаться весьма полезным и увлекательным занятием, способствующем развитию математического мышления и иллюстрирующему способы применения математической теории на практике.

В книге рассматриваются плоские кривые, которые находят практическое применения в различных областях человеческой деятельности или проявляются в некоторых природных явлениях. Приводятся их определения и графики, при этом рассмотрение кривых сопровождается строгим математическим доказательством их свойств.

Книга рассчитана на читателя, знакомого с дифференциальным и интегральным исчислением в объеме стандартного курса технического вуза. Материал пособия можно использовать для работы в научных кружках, на студенческих конференциях и практических занятиях.

§ 1. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ

Логарифмической спиралью называется кривая, определяемая в полярной системе координат уравнением

$$\rho = e^{a\varphi},$$

где ρ – полярный радиус спирали, e – основание натурального логарифма, $a > 0$ – некоторое положительное действительное число, φ – угол.

Если угол φ возрастает (убывает) в арифметической прогрессии, то ρ возрастает (убывает) в геометрической прогрессии.

Размер витков логарифмической спирали постепенно увеличивается, но их форма остается неизменной.

Впервые логарифмическая спираль была описана Декартом (1596–1650 гг.), а позднее детально исследована Я. Бернулли (1654–1705 гг.).

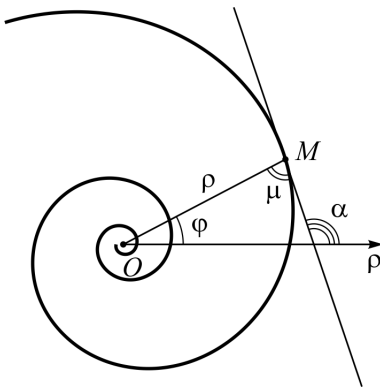


Рис. 1

Непосредственно из уравнения следует, что $\rho = 1$ при $\varphi = 0$; $\rho \rightarrow +\infty$ при $\varphi \rightarrow +\infty$, при этом спираль развертывается против хода часовой стрелки; $\rho \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow -\infty$ и спираль закручивается по ходу часовой стрелки, делая около полюса O (рис. 1) бесконечное число оборотов, стремясь к нему, как к своей асимптотической точке.

Из рисунка видно, что $\alpha = \varphi + \mu$, тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \mu}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \mu}. \quad (1)$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{(\rho \sin \varphi)'}{(\rho \cos \varphi)'} = \frac{\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi}{\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi} = \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{делим почленно} \\ \text{на } \rho' \cos \varphi \end{array} \right] = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \frac{\rho}{\rho'}}{1 - \frac{\rho}{\rho'} \operatorname{tg} \varphi}. \end{aligned} \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем, что $\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\rho'}$. Тогда, с уче-

том $\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi} = ae^{a\varphi}$, получим $\operatorname{tg} \mu = \frac{e^{a\varphi}}{ae^{a\varphi}} = \frac{1}{a} = \operatorname{const}$, т. е.

прямые, выходящие из полюса, пересекают логарифмическую спираль под одним и тем же углом. Иначе: касательные в каждой точке кривой образуют с радиус-вектором в каждой точке M кривой один и тот же угол. Отсюда и другое название кривой – *равноугольная*. Из всех кривых подобным свойством обладает еще только окружность, которая пересекает свои радиус-векторы под прямым углом.

Из уравнения кривой следует, что $\varphi = \frac{1}{a} \ln \rho$, т. е. полярные углы пропорциональны логарифмам радиус-векторов. Отсюда и название – логарифмическая спираль.

Определим длину S дуги логарифмической спирали от $\varphi = -\infty$ до произвольной точки φ . Дифференциал дуги

$$dS = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi = \sqrt{1 + a^2} \cdot e^{a\varphi} d\varphi, \text{ тогда}$$

$$S = \sqrt{1 + a^2} \int_{-\infty}^{\varphi} e^{a\varphi} d\varphi = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} e^{a\varphi} \Big|_{-\infty}^{\varphi} = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} e^{a\varphi}.$$

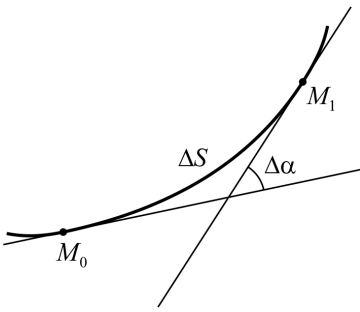


Рис. 2

Если дана некоторая дуга и длина дуги между точками M_0 и M_1 равна ΔS (рис. 2), а угол поворота касательных при переходе от M_0 к M_1 равен $\Delta\alpha$, то кривизна кривой κ в точке M_0 определяется равенством

$$\kappa = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta S} = \frac{d\alpha}{dS}. \quad (3)$$

Из (3) для нашего случая

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{d\varphi}{dS} + \frac{d\mu}{dS} = \frac{d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi} + \frac{d\mu}{dS} = \\ &= \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}}_{\frac{d\varphi}{dS}}} + \frac{d\mu}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dS} = \frac{d\varphi}{dS} \left(1 + \frac{d\mu}{d\varphi} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}} \left(1 + \frac{d\left(\operatorname{arctg} \frac{\rho}{\rho'}\right)}{d\varphi} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}} \left(1 + \frac{\frac{(\rho')^2 - \rho \cdot \rho''}{(\rho')^2}}{1 + \frac{\rho^2}{(\rho')^2}} \right) = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho \cdot \rho''}{(\rho^2 + (\rho')^2)^{3/2}}.$$

Радиус кривизны

$$R = \frac{1}{\kappa} = \frac{(\rho^2 + (\rho')^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho \cdot \rho''} = \frac{\rho^3(1+a^2)^{3/2}}{\rho^2(1+a^2)} = \frac{e^{a\varphi} \sqrt{1+a^2}}{1+a^2}.$$

Радиус кривизны в каждой точке спирали пропорционален длине дуги от ее начала в этой точке.

Если в каждой точке M кривой провести нормаль, направленную в сторону вогнутости кривой, отложив на этой нормали отрезок $MC = R$ (рис. 3), то точка C называется *центром кривизны* кривой в точке M . Совокупность всех центров кривизны данной линии образует некоторую новую линию, называемую *эволютой* по отношению к первой кривой. По отношению к своей эволюте данная линия называется *эвольвентой* (*разверткой*). Физическое истолкование

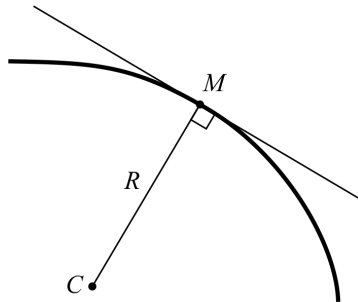


Рис. 3

эволюты и эвольвенты следующее. Пусть на эволюту натянута гибкая нерастяжимая нить. Если эту нить разворачивать, составляя все время натянутой, то конец нити опишет эвольвенту.

Пусть полярные координаты точки C суть ρ_1 и φ_1 . Тогда

можно доказать, что $\rho_1 = ae^{a\varphi_1 - a\frac{\pi}{2}}$, т. е. эволюта логарифмической спирали является тоже логарифмической спиралью, увеличенной в a раз и повернутой на прямой угол.

Посмотрим, как ведет себя спираль $\rho = e^{a\varphi}$ по отношению к преобразованию подобия. Умножим все ее радиусы-векторы на множитель k , получим $\rho_1 = ke^{a\varphi}$. Пред-

ставим $k = e^{\ln k}$, тогда $\rho_1 = e^a \left(\varphi + \frac{\ln k}{a} \right)$. Обозначим через

$\varphi_1 = \varphi + \frac{\ln k}{a}$, получим, что $\rho_1 = e^{a\varphi_1}$ и сравним его с $\rho = e^{a\varphi}$.

Получим, что $\rho_1 = e^{a\varphi_1}$ и сравним его с $\rho = e^{a\varphi}$. Видим, что при подобном преобразовании получаем кривую, конг-

руэнтную данной, но повернутую на угол $\frac{\ln k}{a}$ относитель-

но этого первоначального положения. Каждый последующий виток подобен предыдущему.

В природе приходится нередко встречаться с логарифмической спиралью. Живые существа обычно растут, сохраняя общее начертание своей формы. Так раковины морских животных растут лишь в одном направлении, не слишком вытягиваясь в длину. Поэтому им приходится скручиваться, причем рост совершается так, что раковина сохраняет свою первоначальную форму. Но такой рост может совершаться лишь по логарифмической спирали или ее некоторым про-

странственным аналогам. Поэтому раковины многих моллюсков, улиток (рис. 4), рога, например, горных козлов, закручены по логарифмической спирали. По логарифмической спирали закручивают нити паутины некоторые виды пауков. Можно заметить, что семечки в головках подсолнуха расположены по дугам, близким к логарифмической спирали (рис. 5). По ней же закручена Галактика, которой принадлежит Солнечная система.



Рис. 4. Улитка

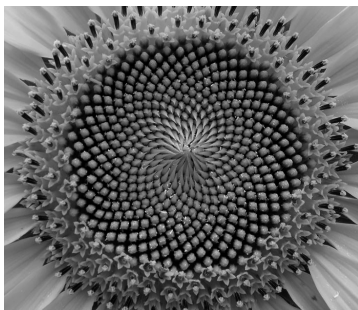


Рис. 5. Головка подсолнуха

Применения логарифмической спирали в технике основаны на свойстве этой кривой пересекать все свои радиусы-векторы под одним и тем же углом. Например, вращающиеся ножи в различных режущих машинах (на рис. 6 представлен нож соломорезки) имеют профиль, очерченный по дуге логарифмической спирали, благодаря чему угол θ между лезвием ножа и направлением скорости его вращения (угол резания), остается равным $\frac{\pi}{2} - \mu = \text{const}$, т. к. μ остается неиз-

менным. В зависимости от обрабатываемого материала требуется тот или иной угол резания, что обеспечивается выбором параметра соответствующей спирали.

В гидротехнике по логарифмической спирали заворачивают трубу, подводящую ток воды к лопастям турбины. Постоянство угла μ обеспечивает здесь то, что потери энергии на изменение направления течения в трубе оказываются минимальными, и следовательно, напор воды используется с максимальной производительностью. По схожим причинам улитка турбокомпрессора, предназначенного для подачи воздуха, внешне напоминает логарифмическую спираль (рис. 7).

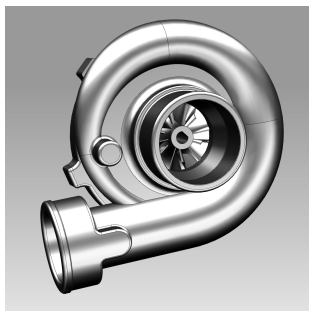
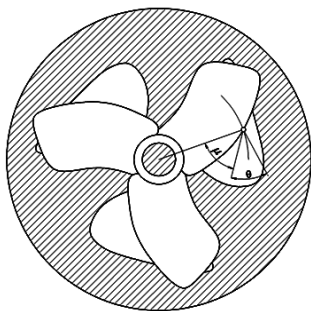


Рис. 6. Нож соломорезки

Рис. 7. Улитка турбокомпрессора

В теории машин и механизмов логарифмическая спираль применяется при проектировании зубчатых колес с переменным передаточным числом. Как это осуществляется, видно на примере зубчатых колес (рис. 8). Два квадрата расположены так, как показано на этом рисунке. Через середину и конец каждой стороны этих квадратов проведены дуги одинаковых логарифмических спиралей с полюсами в центрах квадратов, одна из которых закручивается по ходу часовой стрелки, а другая – против; в точке P спирали касаются между собой. Если M и M_1 – две точки спиралей, взятые так, что $OM + O_1M_1 = OP + O_1P$, то можно показать, что $\overset{\frown}{PM} = \overset{\frown}{PM_1}$.

Поэтому дуги спиралей будут катиться одна по другой без скольжения при вращении квадратов. При этом передаточное число (отношение угловых скоростей логарифмических колес) будет непрерывно меняться, достигая в течении каждого оборота колеса четыре раза максимума и четыре раза минимума.

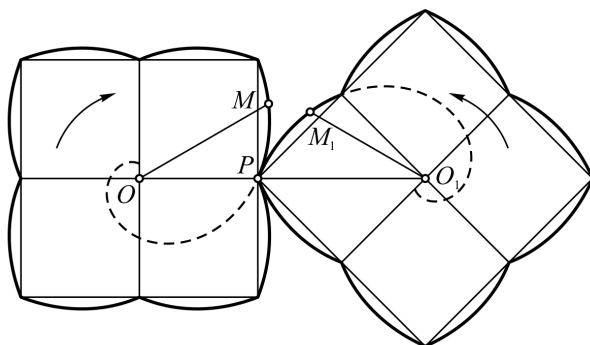


Рис. 8. Зубчатые колеса

В заключении отметим, что существует прибор для вычерчивания логарифмической спирали, на работе которого мы здесь не останавливаемся.

