

ЗМІСТ

Вступ.	Наукові принципи теорії ймовірностей і математичної статистики. Від азартних ігор до технічних, інженерних, соціально-економічних та організаційних процесів	5
	Відомі імена в теорії ймовірностей та математичній статистиці	11
Розділ 1.	Елементи комбінаторики	21
Розділ 2.	Експеримент, подія, види подій	41
Розділ 3.	Ймовірність події	57
Розділ 4.	Теореми: про ймовірність суми несумісних подій та про ймовірність добутку незалежних подій	73
Розділ 5.	Умовна ймовірність. Повна група подій. Формула повної ймовірності. Формули Байеса	83
Розділ 6.	Послідовні випробування. Формула Бернуллі. Наближення формули Бернуллі: теореми Лапласа та формула Пуассона	93
Розділ 7.	Випадкові величини. Розподіли випадкових величин та їх основні характеристики	113
Розділ 8.	Найважливіші розподіли дискретних випадкових величин	123

Розділ 9. Найважливіші розподіли неперервних випадкових величин	141
Розділ 10. Вступ до математичної статистики. Статистичний розподіл вибірки. Емпірична та теоретична функції розподілу	159
Розділ 11. Полігон та гістограма	169
Розділ 12. Незміщені, ефективні та обґрунтовані оцінки. Статистичні оцінки параметрів розподілу	175
Розділ 13. Інструменти MS Excel	189
Розділ 14. Елементи кореляційно-регресійного аналізу	207
Розділ 15. Метод (імітації) Монте-Карло	221
Література	231



ВСТУП

Наукові принципи теорії ймовірностей і математичної статистики. Від азартних ігор до технічних, інженерних, соціально-економічних та організаційних процесів

*Чи не всі процеси в повсякденній роботі інженерів, фінансистів, соціологів, психологів, управлінців, менеджерів є складними для їхнього опису, а тим більше «точного» моделювання (з урахуванням одразу всіх особливостей). Тим не менш усе частіше виникають ситуації, де просто необхідно досліджувати той чи інший **випадковий процес**. Без знання наукових принципів у підходах до цього питання будь-яке дослідження такого типу не може вважатися задовільним. Тому виникає потреба у знанні цих наукових*

принципів, а також вмінні їх застосовувати, зокрема для прогнозування варіацій випадкових процесів на майбутнє (визначення можливих ризиків, значень тих чи інших параметрів), виявлення закономірностей окремих наборів даних чи залежностей між декількома наборами даних, моделювання та імітації процесів з використанням ЕОМ тощо.

Часто науковці (в різноманітних контекстах) використовують поняття «**чорної скрині**». Під цим поняттям можна розуміти дещо (як правило, певний процес), що можна досліджувати з різних позицій та отримувати певні дані, проте механізм виникнення (генерації) саме таких даних у той чи інший момент часу з'ясувати до кінця досить складно або ж узагалі неможливо.

Виявляється, що більшість **випадкових процесів**, починаючи від найпростіших («побутових») і закінчуючи складними інженерними чи то соціально-економічними процесами, можна вважати «**чорними скринями**» в тому сенсі, що дані, які їх супроводжують, часто не розкривають суті механізму їх виникнення.

Теоретична та практична бази, які пропонують дисципліни **теорія ймовірностей** та **математична статистика**, є універсальним апаратом для дослідження задач з елементами випадковості.

Поєднання математичних дисциплін *теорія ймовірностей* та *математична статистика*, що мають спільний історичний витік, покликане досліджувати будь-які *випадкові процеси* наявними засобами математики.

Під *моделлю* розуміють деякий матеріальний чи уявний об'єкт, основна мета якого – замінювати (наслідувати) оригінальний об'єкт, при цьому зберігаючи тільки деякі (найбільш важливі з тієї чи іншої точки зору) його властивості.

Під *математичною моделлю* розуміють таку модель об'єкта, що представляє собою найважливіші математичні закономірності (рівності, нерівності, співвідношення, залежності, функції, комбінації, перестановки, розміщення), за допомогою яких можна описати оригінал.

Як правило, чим простіший вигляд має та чи інша математична модель (закономірність), тим більше реальних процесів вона представляє. Так, один з найпростіших математичних законів $a=b$ зустрічається в математичних моделях чи не усіх об'єктів. Він може відображати, скажімо, той факт, що кількість стільчиків у заповненій студентській аудиторії дорівнює кількості присутніх студентів або ж що кількість вільних стільців дорівнює нулеві.

Теорія ймовірностей у своїх дослідженнях рухається шляхом побудови *математичної моделі* процесу («*чорної скрині*»), яка б максимально відповідала йому з точки зору *ймовірності* (її називають ще *ймовірнісна модель*) – ідеалізованої (припускаючи, що така існує) *відносної частоти явища*, яка не залежить від кількості чи якості спостережень за процесом, їх часом або ж інших суб'єктивних факторів, а притаманна лише конкретному явищу в даному процесі. Такий підхід дає змогу в подальшому математично моделювати ті чи інші явища, події і є цілком природнім. Він виправдав себе на практиці в багатьох галузях людської діяльності, зокрема військовій галузі, інженерії, соціології, менеджменті тощо.

Математична статистика рухається шляхом аналізу вхідної (кількісної та якісної) **інформації** (даних спостережень), пов'язаної з процесами, для отримання на її основі якісних чи кількісних висновків щодо нього (зокрема для імітації та прогнозу на майбутнє), а також для винайдення нових методів ефективного збору та обробки інформації.

Інформація (від лат. *informatio* – повідомлення, роз'яснення, вираження; лат. *informare* – надавати форму) – у широкому сенсі абстрактне поняття, що має дуже багато значень, залежно від контексту. У вузькому сенсі – це відомості (повідомлення, дані), незалежно від форми їх подання.

На ранніх етапах виникнення дисциплін **теорія ймовірностей** та **математична статистика** (коли ще їх не розділяли як окремі наукові підходи) основна увага практиків була зосереджена на дослідженні особливостей процесів та явищ, пов'язаних з азартними іграми. Це був період накопичення «базового досвіду» з даного питання. Найбільшу популярність серед таких процесів до цих пір мають два: «**підкидання монети**» та «**підкидання грального кубика**». Так, французький дослідник **Жорж Бюффон** був одним із тих, хто досліджував явище «**випадіння гербової сторони**», що супроводжує процес «**підкидання монети**». Він підкидав монету **4040** разів, з яких потрібне йому явище («**випадіння гербової сторони**») відбулося в **2048** випадках (**50,69 %**). На основі отриманих даних проводилися подальші дослідження. Аналогічний експеримент проводили також такі науковці, як **Огастес де Морган** (**4092** підкидання, **50,05 %** випадінь), **Вільям Джевонс** (**20 480** підкидань, **50,68 %** випадінь), **Всеволод Романовський** (**80 640** підкидань, **49,23 %** випадінь), **Карл Пірсон** (**24 000** підкидань, **50,05 %** випадінь), **Вільям Феллер** (**10 000** підкидань, **49,79 %** випадінь).

«**Чорною скринєю**» в описаних випадках виступає процес «**підкидання монети**», а даними, що отримуються на кожному з його етапів – інформація про настання явища «**випадіння гербової**

сторони» (умовно *АВЕРС*). Протилежним до нього є явище «*випадіння сторони номіналу*» (умовно *РЕВЕРС*). Одне може відбутися тоді і лише тоді, коли інше не відбувається.

Статистична інформація, отримана на основі спостережень за вказаним явищем, дала в подальшому підґрунтя багатьом теоретичним ідеям, зокрема тій, що *ймовірнісна модель* процесу «*підкидання монети*» повинна обов'язково враховувати його властивість проявляти явище «*випадіння гербової сторони*» приблизно у *50%* від усіх спостережень, незалежно від їхньої кількості, і тим точніше – чим більше цих спостережень.

Поєднання дисциплін *теорія ймовірностей* та *математична статистика* дозволяє з різних боків підійти до дослідження будь-яких процесів з елементами випадковості (та явищ, що їх супроводжують) і, як результат, робити певні прогнози на майбутнє.

Складні моделі макроекономічних процесів можна значно спростити, не втрачаючи при цьому точності. Те ж саме стосується й моделей інженерних, фінансових, технічних, соціологічних, психологічних процесів тощо. У багатьох випадках урахування лише найважливіших факторів є більш виправданим, аніж перерахунок та дослідження одразу всіх (в тому числі майже неважливих). Вибір найкращої моделі з такої точки зору можна значно полегшити, використовуючи *теорію ймовірностей* та *математичну статистику*.

Чимале значення в будь-якому дослідженні також має *наукова культура* дослідника. Якщо, задовго до розповсюдження ЕОМ, до такої культури належало, зокрема, вміння за допомогою довідника основних формул, шляхом нескладних перетворень знаходити відповіді на ті чи інші завдання математичного характеру, то тепер до цієї культури відносять: вміння користуватися засобами та інструментами ЕОМ та знання їхніх особливостей.

У цьому підручнику пропонується використання популярного табличного процесора *MS Excel*, оскільки він забезпечує

дослідника універсальними інструментами (таблиці, функції, програми, графіки) для роботи з різноманітними масивами даних, що є якраз необхідним для моделювання, порівняння, імітації чи прогнозу.

Незамінним науковим апаратом при обчисленні тих чи інших комбінацій у математичних моделях процесів є математична дисципліна під назвою **комбінаторика**. Без неї годі й уявити як класичну, так і сучасну **теорію ймовірностей**, і тим більше **математичну статистику**. Тому для кращого розуміння подальшого матеріалу на початку книги подається відповідний **розділ 1, «Елементи комбінаторики»**).

Відомі імена в теорії ймовірностей та математичній статистиці

П'єр де Ферма (17.08.1601 – 12.01.1665) – французький математик, один із основоположників **аналітичної геометрії, математичного аналізу, теорії ймовірностей та теорії чисел**. За професією був юристом, з 1631 року – радник парламенту в Тулузі. Прекрасний поліглот. Відомий завдяки формуванню *Великої теореми Ферма*.



П'єр де Ферма розробляв основи **теорії ймовірностей** незалежно від Паскаля. Саме з переписки 1654 року Ферма і Паскаля, в якій вони прийшли, зокрема, до такого поняття, як *математичне сподівання*, і **теорем** про ймовірність суми подій та про ймовірність добутку подій, бере початок наука **теорія ймовірностей**. Їхні результати наведено в книзі Гюйгенса 1657 року.

Блез Паскаль (19.06.1623, Клермон-Ферран – 19.08.1662, Париж) – французький математик, фізик, винахідник, літератор та філософ. Класик французької літератури, один із засновників **математичного аналізу, теорії ймовірностей та проєктивної геометрії**. Винахідник перших аналогів обчислювальної техніки, автор основного закону гідростатики.



1654 року, в переписці з **П'єром де Ферма**, на прикладах з різних азартних ігор закладаються основи майбутньої **теорії ймовірностей**. Паскаль та Ферма, розв'язуючи задачу «**Про справедливий розподіл ставок між гравцями при перерваній серії партій**» (нею займався італійський математик XV століття Лука Пачолі), використовували власні аналітичні методи підрахунку шансів, і кожен прийшов до одного й того ж результату. У той же час Паскаль створює «**Трактат про арифметичний трикутник**», де досліджує властивості об'єкта, що в майбутньому отримав назву *трикутника Паскаля*