
ЗМІСТ

ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В'ЯЗКОПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА	8
1.1 Основні поняття теорії в'язкопружності.....	8
1.2 Визначальні рівняння теорії в'язкопружності.....	16
1.3 Ядра повзучості та релаксації.....	20
1.4 Аналітичне подання ядер у операторах спадкової в'язкопружності	24
РОЗДІЛ 2 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ	31
2.1 Квазістатичні задачі теорії лінійної в'язкопружності.....	31
2.2 Метод квазіконстантних операторів.....	37
2.3 Застосування рядів за степенями операторів Вольтерра	39
2.4 Методи інтегральних перетворень.....	47
РОЗДІЛ 3 ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТИВ	57
3.1 Основні поняття теорії композиційних матеріалів.....	57
3.2 Пружні характеристики ізотропних та трансверсально-ізотропних матеріалів.....	62
3.3 Задача гомогенізації композитів	66
3.4 Методи гомогенізації композиційних матеріалів	86

РОЗДІЛ 4	
ГОМОГЕНІЗАЦІЯ В'ЯЗКОПРУЖНОГО	
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО КОМПОЗИТУ	99
4.1 Основні припущення та вихідні співвідношення	99
4.2 Поздовжнє розтягнення	106
4.3 Поперечне розтягнення.....	145
4.4 Поздовжній зсув	169
4.5 Поперечний зсув	187
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	205
ДОДАТКИ	229
ДОДАТОК А.....	229
ДОДАТОК Б	236
ДОДАТОК В.....	244
ДОДАТОК Г	246
ДОДАТОК Д.....	256
ДОДАТОК Є	278
ДОДАТОК Ж.....	293

ВСТУП

Важливою тенденцією розвитку сучасної техніки є зниження матеріалоємності конструкцій та споруд. Застосування композиційних матеріалів дозволяє вирішити цю задачу. Такі матеріали мають комплекс різноманітних властивостей, раціональне поєднання яких дозволяє оптимізувати технічні характеристики споруд та конструкцій.

Використання композитів дозволяє проектувати матеріали з заданими властивостями: жорсткістю, міцністю, пластичністю, антикорозійною стійкістю та іншими властивостями, важливими при практичному застосуванні. Наявність таких властивостей пов'язана з структурою композиту та властивостями його складових елементів. Тому знаходження механічних характеристик композиційних матеріалів за аналогічними характеристиками їх складових елементів є однією з актуальних задач сучасної механіки.

Композиційні матеріали, що застосовуються на практиці, у багатьох випадках являють собою систему шарів, що складаються з розташованих у одному напрямі волокон, поєднаних між собою матеріалом матриці. Експериментально доведено, що такі композити проявляють трансверсально-ізотропні властивості, причому для багатьох з них відзначається наявність в'язкопружності. У зв'язку з цим важливою для практики є задача гомогенізації в'язкопружних трансверсально-ізотропних композитів, що розглядається у даній роботі.

Розв'язання цієї задачі передбачає визначення ефективних механічних характеристик композиту, що дозволяє при розрахунках напружено-деформованого стану елементів будівельних конструкцій, окремих деталей машин та механізмів розглядати його як однорідний матеріал. Ця задача

ускладнюється тим, що наявність в'язкопружних властивостей передбачає використання інтегральних операторів для їх опису. Характеристики таких операторів можуть визначатися як експериментально, так і з використанням аналітичних та чисельних методів.

У даній роботі для визначення параметрів вказаних операторів використовується інтегральне перетворення Лапласа. Перехід у простір зображень дозволяє замінити задачу розв'язання системи інтегральних рівнянь задачею розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Вибір структури та змісту даної роботи орієнтований на використання її широким колом фахівців, а також студентів та аспірантів, що працюють над розв'язанням задач теорії в'язкопружних композитів. При цьому автори у перших трьох розділах, що висвітлюють основні теоретичні відомості, необхідні для дослідження в'язкопружних композитів, широко використовували матеріали, викладені у відомих дослідженнях [2; 3; 10; 28; 67; 78; 83; 139]. Матеріал четвертого розділу ґрунтується на власних результатах, отриманих авторами.

У першому розділі монографії висвітлюються питання, пов'язані з основами математичного моделювання в'язкопружного середовища. Зокрема, тут розглянуті основні поняття теорії в'язкопружності, наведено визначальні рівняння механіки в'язкопружного середовища. Розглянуто інтегральні оператори, що використовуються для моделювання в'язкопружних аналогів механічних констант та їх ядра релаксації та повзучості, існуючі методи ідентифікації цих ядер.

Другий розділ висвітлює основні методи розв'язання задач теорії в'язкопружності, що можуть бути використані для розв'язання задач гомогенізації композитів: метод апроксимацій, метод квазіконстантних операторів, використання рядів за степенями оператора Вольтерра. Значну увагу приділено

висвітленню сутності операційного методу, що використовується у подальшому для розв'язання задач гомогенізації в'язкопружних композитів.

Основні підходи до визначення ефективних характеристик композитів розглянуто у третьому розділі. Зокрема, тут висвітлюються основні поняття теорії композиційних матеріалів, розглянуто систему пружних характеристик ізотропних та трансверсально-ізотропних композиційних матеріалів, деякі існуючі методики гомогенізації композитів.

У четвертому розділі монографії наведено основні результати, отримані авторами щодо гомогенізації в'язкопружного трансверсально-ізотропного композиту. Тут детально розглянуто методику визначення ефективних параметрів інтегральних операторів, що визначають в'язкопружні властивості композитів. Для отримання повної системи характеристик, що визначають механічні характеристики в'язкопружного трансверсально-ізотропного композиту розв'язано задачі поздовжнього та поперечного розтягнення, а також поздовжнього та поперечного зсуву.

Основний підхід, який пропонують для гомогенізації в'язкопружних трансверсально-ізотропних волокнистих композитів автори монографії, ґрунтується на застосуванні кінематичних умов узгодження переміщень точок гомогенізованого композиту та його складових – матриці та волокна. У роботі для розв'язання вказаної задачі пропонується також використання енергетичного критерію узгодження, який дозволяє отримати пружні ефективні сталі. Після цього виконується перехід до в'язкопружних характеристик у просторі зображень Лапласа з подальшим відновленням часових залежностей для в'язкопружного матеріалу.

Автори сподіваються, що матеріал, викладений у даній роботі, стане у нагоді у наукових дослідженнях як фахівцям з механіки деформованого твердого тіла, так і студентам та аспірантам.

РОЗДІЛ 1

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В'ЯЗКОПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА

1.1 Основні поняття теорії в'язкопружності

Напружено-деформований стан пружного тіла при сталому часі навантаженні залишається незмінним. Проте багато матеріалів мають здатність за наявності сталих напружень та сталій температури з часом повільно деформуватися. Цю властивість матеріалів називають в'язкопружністю або повзучістю.

Теорія в'язкопружності передбачає необхідність врахування часу у процесі деформування матеріалу, для яких інерційними силами можна знехтувати.

Теорія в'язкопружності як розділ механіки суцільного середовища сформувалася у середині ХХ сторіччя, хоча багато її принципів та закономірностей було експериментально виявлено ще на початку ХІХ століття [139]. Серед перших дослідників, що виявили явище деформування матеріалів з часом за сталого навантаження були Л. Вікат (1834), В. Вебер (1835, 1841), Р. Кольрауш (1847). Д. Максвелл (1868) вперше сформулював закон деформування матеріалу з часом у вигляді диференціального рівняння. Математичну модель для дослідження лінійної в'язкопружності, що ґрунтується на використанні інтегральних рівнянь, запропонував Л. Больцман (1877) і дещо пізніше вдосконалив В. Вольтерра (1913, 1931). Спрощені моделі в'язкопружного середовища були запропоновані Д.-Д. Томпсоном (1888), В. Фойгтом (1890) та іншими дослідниками.

Суттєвий поштовх для подальшого розвитку теорія в'язкопружності отримала з впровадженням у повсякденну практику композиційних матеріалів. Для багатьох з них є характерною відсутність сталості деформацій при дії сталого навантаження. Це створило передумови для розробки методів та алгоритмів розрахунку напружено-деформованого стану з врахуванням фактору часу.

У 20-х роках минулого сторіччя були запропоновані практичні методи розрахунку в'язкопружних матеріалів, що ґрунтуються на фізичних залежностях між деформаціями та напруженнями. Зокрема, були розроблені теорія старіння та теорія течії. У межах теорії старіння постулюється функціональний зв'язок між напруженнями та деформаціями, що містить змінну часу. Теорія течії розглядає такий зв'язок між напруженнями та швидкостями деформацій. Такі функціональні залежності встановлювалися на основі обробки результатів експериментів, у яких зразки матеріалів піддавалися сталому у часі навантаженню. Суттєвим недоліком таких моделей є те, що час у них входить явним чином, отже, закон деформування матеріалу залежить від початку відліку часу.

Уточнена форма функціональної залежності між напруженнями, деформаціями та їх швидкостями була запропонована А. Надаї та К. Дейвенпортом [139]. Тут у функціональну залежність змінна часу у явному вигляді не входить. На основі використання такої залежності були запропоновані методи розрахунку, що отримали назву теорії зміцнення.

У 40-х роках 20-го століття отримали подальший розвиток диференціальні моделі в'язкопружного матеріалу, у яких диференціальні залежності між напруженнями та деформаціями містили похідні цих величин за часом. Основою для створення таких моделей були експериментальні дані. Проте на початковому після прикладення навантаження проміжку

часу диференціальні моделі погано узгоджувалися з результатами спостережень. Тому провідне місце у лінійній теорії в'язкопружності зайняли інтегральні співвідношення, у яких процес зміни деформацій в'язкопружного тіла у часі описувалися за допомогою лінійних інтегральних операторів. Найбільш відомим прикладом застосування інтегральних співвідношень для моделювання в'язкопружного деформування є спадкова теорія Больцмана-Вольтерра. Подальший розвиток математичного моделювання в'язкопружності пов'язаний з уточненням форми та структури лінійних інтегральних операторів, що використовуються при цьому.

Найпростіші моделі в'язкопружного середовища пов'язані з поданням матеріалу у вигляді поєднання елементарних пружних та в'язких елементів. При цьому для пружного елемента зв'язок між напруженнями та деформаціями устанавлюється законом Гука, тобто напруження, що виникає у елементі під дією зовнішньої сили, є пропорційним його деформації:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (1.1)$$

де E – коефіцієнт пружності (модуль Юнга).

Для в'язкого елемента напруження є пропорційними швидкості деформації:

$$\sigma = K \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (1.2)$$

де σ_1 – коефіцієнт в'язкості матеріалу.

Для побудови найпростіших моделей в'язкопружного тіла його розглядають як сукупність в'язких та пружних елементів, поведінка яких описується відповідно співвідношеннями (1.1) або (1.2). При цьому розглядаються різні типи сполучення в'язких та пружних елементів.