

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ СТАНУ ЗАДАЧ РОЗРАХУНКУ НА МІЦНІСТЬ ТРИШАРОВИХ ПЛАСТИН ТА ОБОЛОНОК.....	11
1.1 Основні підходи до моделювання тришарових пластин та оболонок	11
1.2 Огляд літературних джерел з розрахунку тришарових пластин	15
1.3 Огляд літературних джерел з розрахунку тришарових оболонок	21
РОЗДІЛ 2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РІВНОВАГИ КРУГЛИХ ТРИШАРОВИХ ПЛАСТИН.....	29
2.1 Математична модель напруженого стану	29
2.2 Математична модель деформованого стану	32
2.3 Енергія деформації. Рівняння рівноваги	33
2.4 Вісесиметрична задача згину. Нульове наближення методу малого параметра	42
2.5 Вісесиметрична задача згину. Вищі наближення методу малого параметра	54
2.6 Скінченно-елементна модель тришарової пластини	61
РОЗДІЛ 3 ЗАДАЧІ СТАТИКИ ТРИШАРОВИХ КРУГОВИХ ПЛАСТИН	65
3.1 Поперечний вісесиметричний згин круглих тришарових пластин ...	65
3.2 Поперечний вісесиметричний згин круглих тришарових пластин під дією кусково-неперервних навантажень	73
3.3 Вісесиметричний згин кільцевих тришарових пластин	77
3.4 Статична стійкість тришарових круглих пластин	86
3.5 Визначення критичних навантажень тришарових круглих пластин із застосуванням методу продовження розв'язку за параметром	90
РОЗДІЛ 4 ДЕФОРМУВАННЯ ТА СТІЙКІСТЬ ТРИШАРОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК	97

4.1 Математична модель деформування циліндричних оболонок	97
4.1.1 Деформований стан оболонок	99
4.1.2 Напружений стан оболонок з ізотропного матеріалу	101
4.1.3 Енергія деформації	102
4.2 Деформування циліндричних тришарових оболонок при дії зовнішнього тиску	104
4.3 Стійкість ізотропних тришарових циліндричних оболонок при осьовому стисканні	114
РОЗДІЛ 5 МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ЗОН РУЙНУВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ	119
5.1 Математична модель деформування циліндричних оболонок	119
5.2 Метод змінної жорсткості врахування пластичних властивостей матеріалу та визначення зон руйнування	120
5.3 Математична модель оболонки складної структури	123
5.4 Визначення напружено-деформованого стану в лінійній постановці	125
5.5 Визначення напружено-деформованого стану з врахуванням пластичних деформацій	131
ПІСЛЯМОВА	136
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	138

ВСТУП

Тришарові пластини та оболонки широко застосовуються в авіа- та суднобудуванні, космічній промисловості, цивільному будівництві, радіоелектроніці та інших галузях промисловості. Застосування тришарових конструкцій дозволяє забезпечити більш високу жорсткість та міцність порівняно з аналогічними одношаровими елементами конструкцій такої ж маси. Водночас шляхом застосування спеціальних матеріалів зовнішніх шарів та заповнювача можна забезпечити такі додаткові властивості конструкції як звуко- та теплоізоляція, вібропоглинання тощо.

Такі матеріали як мідь, сплав алюмінієвої бронзи, мартенівська сталь, дюралюміній, полімерні матеріали та композити вже на стадії малих деформацій відхиляються від закону пружності Гука, тобто, для таких матеріалів існує область деформацій, у якій можна застосовувати геометричну лінеаризацію основних рівнянь теорії пружності, але закон пружності Гука вже не описує поведінку матеріалу з достатньою точністю. Урахування фізичної нелінійності матеріалу зумовлює необхідність розв'язання достатньо складних систем нелінійних диференціальних рівнянь, що створює проблеми при розрахунку як одношарових, так і багатшарових пластин і оболонок. Тому дослідження їх напружено-деформованого стану та стійкості є актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла.

Метою досліджень, викладених у монографії, є розробка математичних моделей визначення напружено-деформованого стану і критичних навантажень тришарових кругових пластин та циліндричних оболонок з нелінійно-пружним за Г. Каудерером матеріалом заповнювача та розробка методів розв'язування крайових задач і задач стійкості для вказаних елементів.

Основні напрями досліджень пов'язані з:

– розробкою математичної моделі деформування тришарових круглих пластин з фізично-нелінійним за Г. Каудерером матеріалом заповнювача й

урахуванням гіпотез розподілу компонент напружено-деформованого стану по товщині заповнювача у вигляді нелінійного функціоналу повної потенціальної енергії і системи нелінійних диференціальних рівнянь рівноваги;

– розробкою математичної моделі деформування тришарових циліндричних оболонок з фізично-нелінійним за Г. Каудерером матеріалом заповнювача й урахуванням гіпотез розподілу компонент напружено-деформованого стану по товщині заповнювача у вигляді нелінійного функціоналу повної потенціальної енергії;

– розробкою підходу до розв’язання систем нелінійних диференціальних рівнянь і визначення мінімуму функціонала повної потенціальної енергії;

– розв’язанням крайової задачі згину тришарових круглих та кільцевих пластин для різних розподілених навантажень і крайових умов і аналізом впливу фізичної нелінійності матеріалу заповнювача на напружено-деформований стан тришарових круглих та кільцевих пластин;

– розв’язанням задачі статичної стійкості круглих тришарових пластин з нелінійно-пружним матеріалом середнього шару й аналізом впливу нелінійної пружності матеріалу заповнювача на величину критичного навантаження;

– розв’язанням задачі деформування та статичної стійкості циліндричних тришарових оболонок і аналізом впливу фізичної нелінійності матеріалу заповнювача на напружено-деформований стан та значення критичних навантажень тришарових оболонок.

Об’єкт дослідження – математичні моделі розрахунку тришарових пластин і оболонок в крайових задачах і задачах стійкості, які враховують фізичну нелінійність заповнювача і гіпотези щодо розподілу компонент напружено-деформованого стану по товщині заповнювача.

Предмет дослідження – побудовані на основі математичних моделей нелінійні функціонали енергії та системи нелінійних диференціальних рівнянь рівноваги тришарових круглих пластин і циліндричних оболонок із фізично-нелінійним за Г. Каудерером заповнювачем, методи їх розв’язання, напружено-деформований стан і стійкість вказаних елементів.

Методи дослідження. У дослідженні напружено-деформованого стану і стійкості тришарових кругових пластин та циліндричних оболонок з нелінійно-пружним заповнювачем використано: методи, що базуються на застосуванні просторових рівнянь теорії пружності та використанні гіпотез відносно розподілу компонент напружено-деформованого стану, які дають змогу звести тривимірну задачу теорії пружності до двовимірної; метод малого фізичного параметра при розв'язуванні крайових задач згину круглих та кільцевих пластин; метод перетворень систем нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами з послідовним інтегруванням отриманих рівнянь, зокрема, неоднорідного модифікованого рівняння Бесселя (при визначенні напружено-деформованого стану круглих пластин при поперечному згині); метод Рітца (в крайових задачах та задачах стійкості пластин та оболонок); метод колокацій (в задачах визначення напружено-деформованого стану кільцевих пластин при поперечному згині); метод мінімізації нелінійного функціонала (для нелінійних задач стійкості пластин та оболонок).

Одержані результати узагальнюють класичні висновки лінійної теорії тришарових пластин та оболонок, а також принципово відрізняються від відомих варіантів нелінійної теорії використанням співвідношень Г. Каудерера для опису поведінки нелінійно-пружного середнього шару.

Наукова новизна результатів досліджень полягає у наступному:

– удосконалено математичні моделі визначення напружено-деформованого стану і критичних навантажень тришарових круглих пластин і циліндричних оболонок з нелінійно-пружним за Г. Каудерером матеріалом заповнювача;

– вперше побудовано нелінійні функціонали повної потенціальної енергії тришарових кругових пластин і циліндричних оболонок, які враховують удосконалені математичні моделі;

– вперше отримано систему нелінійних диференціальних рівнянь рівноваги тришарових круглих пластин на основі удосконаленої математичної моделі;

– вперше отримано розв’язок задачі поперечного згину і стійкості тришарових круглих та кільцевих пластин з нелінійно-пружним за Г. Каудерером середнім шаром, що дозволяє проаналізувати вплив нелінійної пружності матеріалу заповнювача на напружено-деформований стан та величину критичних навантажень пластини;

– удосконалено підхід до розв’язання задачі статичної стійкості тришарових круглих пластин та циліндричних оболонок з урахуванням фізичної нелінійності заповнювача;

– дістав подальший розвиток метод малого параметра при розв’язанні системи нелінійних диференціальних рівнянь рівноваги тришарових круглих пластин;

– дістав подальший розвиток метод Рітца при розв’язанні крайових задач тришарових круглих пластин та циліндричних оболонок з нелінійно-пружним за Г. Каудерером заповнювачем;

– дістав подальший розвиток метод колокацій при розв’язанні задачі поперечного згину тришарових кільцевих пластин з нелінійно-пружним за Г. Каудерером середнім шаром.

Запропоновані математичні моделі дозволяють аналізувати вплив на напружено-деформований стан і критичні навантаження тришарових кругових пластин та циліндричних оболонок нелінійної пружності матеріалу шарів у формі Г. Каудерера. Отримані на основі запропонованих моделей розв’язки задач деформування і стійкості тришарових кругових пластин та циліндричних оболонок можуть бути застосовані в практиці конструкторських організацій.

Зміст монографії побудовано наступним чином. У першому розділі проведено огляд стану задач розрахунку тришарових пластин та оболонок. Виконано огляд класичних та сучасних літературних джерел з розрахунку тришарових елементів конструкцій.

Виходячи з аналізу джерел, присвячених тематиці дослідження, можна зробити такі висновки.

По-перше, більшість робіт, присвячених аналізу напружено-деформованого стану тришарових елементів конструкцій, виконано у фізично і геометрично лінійній постановці.

По-друге, з робіт, виконаних в нелінійній постановці, більшість присвячено врахуванню геометричної нелінійності, при цьому вважається, що властивості матеріалу конструкції описуються лінійними співвідношеннями закону Гука.

Порівняно з іншими роботами, є менш розглянутим напружено-деформований стан тришарових елементів конструкцій із заповнювачем з нелінійно-пружних матеріалів у формі Г. Каудерера, які відхиляються від закону Гука вже на стадії малих деформацій. Обмежена кількість таких робіт пояснюється математичними труднощами, які виникають під час розв'язання задач у фізично-нелінійній постановці. Отже, є необхідність у дослідженні напружено-деформованого стану тришарових пластин і оболонок із фізичною нелінійністю матеріалу заповнювача та розвиненні методів розв'язання нелінійних крайових задач.

У другому розділі розглянуто задачу вісесиметричного деформування кругової тришарової пластини з ізотропними зовнішніми шарами та нелінійно-пружним середнім шаром. Напружений стан в середньому шарі визначається законом пружності в формі Г. Каудерера.

На основі рівнянь теорії пружності та енергетичного принципу Лагранжа отримано систему нелінійних диференціальних рівнянь рівноваги кругової тришарової пластини з нелінійно-пружним середнім шаром.

До нелінійних диференціальних рівнянь застосовано метод малого параметра, в результаті чого отримано рекурентну послідовність лінійних диференціальних рівнянь.

Системи диференціальних рівнянь нульового та подальших наближень шляхом послідовних інтегрувань та тотожних перетворень зводяться до неоднорідного модифікованого рівняння Бесселя. Зведенням системи диференціальних рівнянь до рівняння Бесселя та подальшим інтегруванням

отримано загальний розв'язок систем диференціальних рівнянь рівноваги з точністю до третього наближення.

У третьому розділі розглянуто задачі статички тришарових кругових пластин з нелінійно-пружним заповнювачем. Наводиться чисельний розрахунок згину тришарових круглих та кільцевих пластин при дії розподілених та кусково-неперервних поперечних навантажень. Розрахунок виконано у лінійній та нелінійній постановці. Розглянуто задачу статичної стійкості круглих тришарових пластин. Наведено чисельний розрахунок критичного навантаження та порівняння результатів з іншими публікаціями. Проаналізовано вплив нелінійної пружності матеріалу заповнювача на напружено-деформований стан та величину критичних навантажень тришарових круглих і кільцевих пластин.

У четвертому розділі на основі загальних рівнянь теорії пружності отримано нелінійний функціонал повної потенціальної енергії тришарових циліндричних оболонок з нелінійно-пружним середнім шаром. При цьому для матеріалу обшивок оболонок вважається справедливим закон Гука, а заповнювач вироблено з нелінійно-пружного матеріалу, що описується законом пружності в формі Г. Каудерера. Для обшивок приймається гіпотеза Кірхгофа-Лява, для заповнювача – гіпотеза про лінійний розподіл тангенціальних напружень по товщині та нестисливість матеріалу заповнювача в поперечному напрямі.

Розглянуто задачу деформування тришарових циліндричних оболонок під дією зовнішнього рівномірного навантаження та задачу статичної стійкості тришарових циліндричних оболонок при осьовому стисканні. Для розв'язання задач використовується метод Рітца як для лінійної, так і для нелінійної постановки. Наводяться чисельні приклади розрахунків напружено-деформованого стану тришарових циліндричних оболонок та визначення критичних навантажень.

У п'ятому розділі виконано скінченно-елементне моделювання циліндричних оболонок складної конфігурації.