

**Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет**

**Гоменюк Сергій Іванович
Спиця Оксана Геннадіївна**

**АНАЛІТИЧНИЙ ТА ЧИСЕЛЬНИЙ ПІДХОДИ ДО
РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ
ДЛЯ БАГАТОШАРОВИХ СЕРЕДОВИЩ**

Монографія

Херсон
Видавничий дім «Гельветика»
2018

УДК: 533.2: 517.5
Г641

Рецензенти:

В. І. Пожуєв, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри механіки Запорізького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України, м. Запоріжжя;

В. І. Кузьменко, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара Міністерства освіти і науки України, м. Дніпро

Друкується рішенням Вченої ради Запорізького національного університету, протокол № 3 від 27.11.2018 р.

Гоменюк С. І., Спиця О. Г.

Г641 Аналітичний та чисельний підходи до розв'язання задач теорії пружності для багат шарових середовищ : монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2018. 128 с.

ISBN 978-966-916-713-2

Монографія присвячена дослідженню напружено-деформованого стану багат шарової плити на базі аналітичного підходу з використанням методу функцій податливості та прямим чисельним методом з використанням методу скінченних елементів, а також порівняльному аналізу отриманих результатів.

Призначено для наукових співробітників, аспірантів та інженерів, робота яких пов'язана з проектуванням конструкцій.

Іл.: 18. Бібліогр.: 179.

The monograph is devoted to the analytical investigation of the stress-strain state of a multilayer plate. The method compliance of functions and the finite element method have been employed.

The edition is suggested for researchers, post-graduate students and engineers who work in the areas of computer-aided engineering problems.

Images: 18. References: 179.

УДК: 533.2: 517.5

ISBN 978-966-916-713-2

© С. І. Гоменюк, О. Г. Спиця
© Запорізький національний університет
© Видавничий дім «Гельветика», 2018

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД МЕТОДІВ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ БАГАТОШАРОВИХ СЕРЕДОВИЩ.....	9
1.1 Огляд методів визначення напружено-деформованого стану пружних шаруватих середовищ.....	9
1.2 Огляд стану досліджень контактних задач теорії пружності для багатошарових середовищ	18
1.3 Висновки до розділу 1	24
РОЗДІЛ 2 ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОСТОРОВОЇ ДЕФОРМАЦІЇ БАГАТОШАРОВОЇ ПЛИТИ	26
2.1 Постановка основних граничних задач для багатошарової плити з ізотропними шарами	26
2.2 Дослідження просторової деформації шару	28
2.3 Функції податливості для багатошарової плити зі зчепленими шарами	33
2.4 Властивості функцій податливості	39
2.5 Алгоритми розв’язання основних граничних задач.....	44
2.6 Перша основна гранична задача для багатошарової трансверсально-ізотропної плити.....	52
2.7 Висновки до розділу 2	58
РОЗДІЛ 3 ОСЕСИМЕТРИЧНІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПРУЖНИХ БАГАТОШАРОВИХ ПЛИТ	59
3.1 Осесиметрична контактна задача про дію штампа на пружну багатошарову плиту.....	59
3.2 Осесиметрична контактна задача про дію двох штампів на пружну багатошарову плиту.....	73
3.3 Висновки до розділу 3	79

РОЗДІЛ 4 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО РОЗВ’ЯЗАННЯ ГРАНИЧНИХ ТА КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ БАГАТОШАРОВИХ ПЛИТ	80
4.1 Методика розв’язання граничних та контактних задач на основі метода скінченних елементів	80
4.1.1 Основи методу скінченних елементів.....	80
4.1.2 Особливості застосування методу скінченних елементів до багатошарових плит	89
4.2 Програмна реалізація.....	90
4.2.1 Алгоритми пошуку зони контакту	90
4.2.2 Алгоритми виконання граничних умов	91
4.2.3 Чисельні розрахунки.....	94
4.3 Застосування методу скінченних елементів.....	97
4.3.1 Застосування методу скінченних елементів до розв’язання граничних задач.....	97
4.3.2 Застосування методу скінченних елементів до розв’язання контактних задач	100
4.4 Висновки до розділу 4	107
ВИСНОВКИ.....	108
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	110

ВСТУП

Визначення напружено-деформованого стану багатошарового середовища, а також уточнення існуючих розрахункових схем реальних конструкцій пов'язане з розширенням області застосування неоднорідних, в тому числі й багатошарових, плит в промисловому і цивільному будівництві, що зумовлює широкий спектр прикладних задач механіки. В машино-, літако-, і кораблебудуванні, в електротехнічному та хімічному машинобудуванні, нафтовидобувній, металургійній та інших галузях промисловості широко використовуються штучно створені матеріали з шаруватими структурами. Розширення сфери застосування шаруватих силових елементів пояснюється, з одного боку, нагальними потребами інженерної практики, з другого – розвитком і вдосконаленням сучасних методів дослідження. У зв'язку з цим особливий інтерес з точки зору розвитку методів дослідження механіки неоднорідних структур полягає у побудові точних розв'язків задачі про визначення напружено-деформованого стану багатошарових плит, з якими у ряді конкретних випадків можна порівнювати розв'язки, побудовані за допомогою відомих чисельних методів.

Перевага багатошарової моделі реальних середовищ полягає у тому, що вона може відобразити різкі зміни механічних властивостей основи після переходу від одного шару до іншого. Крім того, як показали попередні дослідження, багатошаровими основами можна апроксимувати системи, пружні властивості яких неперервно змінюються із глибиною за будь-яким законом.

Одним з найбільш ефективних серед точних методів розв'язання основних граничних задач для пружних багатошарових середовищ можна вважати метод функцій податливості. Дотепер цим методом розв'язана достатньо велика кількість граничних задач теорії пружності для багатошарових основ, в яких нижній шар є пружним або абсолютно

жорстким півпростором. Тому актуальним з точки зору внутрішньої тенденції розвитку механіки деформівного твердого тіла і зовнішньої потреби у ефективних методах розрахунку є розвиток і поширення методу функцій податливості розв'язання задач теорії пружності для багат шарових середовищ, зокрема, багат шарових плит з плоскопаралельними, ізотропними та трансверсально-ізотропними необмеженими в плані шарами.

Метою роботи є узагальнення методу функцій податливості розв'язання граничних задач для багат шарових плит, розробка ефективних наближених способів розв'язання граничних та осесиметричних контактних задач теорії пружності.

Основні завдання дослідження:

- поширити метод функцій податливості розв'язання граничних задач для багат шарових основ на клас граничних задач пружності для багат шарових плит з метою отримання точного розв'язку;
- запропонувати способи ефективної чисельної реалізації одержаних точних аналітичних розв'язків граничних задач;
- запропонувати спосіб чисельного розв'язання осесиметричних контактних задач у випадку, коли на плиту діють штампи з гладкою підошвою, причому ділянки контакту деяких штампів з основою априорі невідомі;
- побудувати інтегральне рівняння і отримати розв'язок осесиметричної контактної задачі про дію двох штампів на багат шарову плиту;
- для перевірки ефективності аналітичного способу розв'язання граничних та осесиметричних контактних задач виконати чисельний розв'язок з використанням методу скінченних елементів.

Об'єктом дослідження є процеси деформування багат шарової плити під дією поверхневого навантаження та штампів.

Предмет дослідження – компоненти напружено-деформованого стану багат шарової плити під дією поверхневого навантаження та штампів.

Методи дослідження. Розв'язання запропонованих у роботі граничних та осесиметричних контактних задач для багатошарових плит ґрунтуються на використанні ефективного у теорії пружних багатошарових основ методу функцій податливості. Рекурентні співвідношення для функцій податливості, допоміжних функцій шару та формули для визначення шуканих напружень та переміщень отримано за допомогою матричної алгебри. Розв'язання осесиметричних контактних задач для пружних багатошарових плит зведено до розв'язання парних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду, чисельне розв'язання яких проводилося методом скінченних сум. Результати здобутих наближених аналітичних розв'язків порівнюються із чисельним розв'язанням цих задач з використанням методу скінченних елементів.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у наступному:

- вперше запропоновано точний розв'язок першої просторової граничної задачі для пружної багатошарової плити й розроблено спосіб чисельної реалізації цього розв'язку;
- вперше розв'язана осесиметрична контактна задача про дію одного та двох штампів на пружну багатошарову плиту шляхом зведення до розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Інтегральне рівняння приведено до вигляду, зручного для чисельної реалізації;
- отримали подальший розвиток чисельні підходи до розв'язання першої просторової граничної та осесиметричної контактної задач для пружної багатошарової плити з використанням методу скінченних елементів;
- досліджено особливості чисельних розв'язків граничних та контактних задач для багатошарових плит для ряду частинних випадків.

Вірогідність наукових положень і висновків роботи забезпечується коректністю математичних постановок розглянутих задач; строгістю використання математичних методів; збіжністю чисельних результатів розв'язків конкретних задач, отриманих аналітичним методом і методом скінченних елементів; узгодженістю всіх одержаних чисельних результатів з очікуваним фізичним змістом задач; перевіркою для конкретних граничних

задач виконання граничних умов і умов сумісності деформації шарів основи за допомогою програмних математичних пакетів.

Практичне значення отриманих результатів полягає в можливості застосування розробленої методики розв'язання задач та програмних продуктів для чисельної реалізації при розрахунках, пов'язаних з проектуванням конструкцій. Отримані точні розв'язки граничних задач теорії пружності для багатошарових плит можуть бути використані як еталонні для визначення меж вірогідності наближених методів розв'язання задач теорії пружності для багатошарових середовищ.