

**Лекція 1. Подвійний інтеграл:
означення, властивості, обчислення**

**Задачі, що приводять до поняття
подвійного інтеграла**

Задача 1. (Про об'єм циліндричного тіла)

Нехай задано тіло, яке обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y) \geq 0$, знизу – замкненою обмеженою областю $D \subset Oxy$, з боків – циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz (рис. 1).

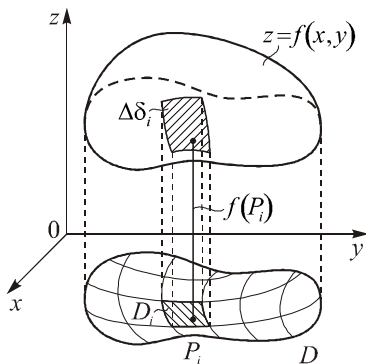


Рис. 1

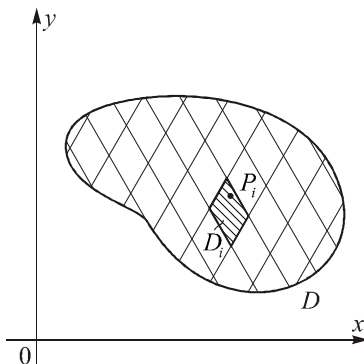


Рис. 2

Розіб'ємо довільним чином область D на n частин D_i , які не мають спільних внутрішніх точок, і площі яких дорівнюють ΔS_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Виберемо довільну точку $P_i(\xi_i; \eta_i) \in D_i$, значення функції в цій точці $f(P_i) = f(\xi_i; \eta_i)$. Знайдемо добуток $f(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i$, який дорівнює об'єму циліндричного стовпчика з твірними, паралельними осі Oz , основою D_i і висотою $f(P_i)$. Усього таких стовпчиків n , і сума їх об'ємів наближено дорівнює об'єму циліндричного тіла:

$$V \approx V_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i. \quad (1)$$

Позначимо через $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(D_i)$ – найбільший з діаметрів областей D_i ; діаметром області називаємо найбільшу з її хорд. Об'єм заданого циліндричного тіла знаходиться як границя суми (1) при $\lambda \rightarrow 0$:

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} V_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i. \quad (2)$$

Задача 2. (Про масу матеріальної пластини)

Нехай задано плоску неоднорідну матеріальну пластину, формою якої є область D (рис. 2). В області D задано неперервну функцію $\gamma = \gamma(x, y)$, яка визначає густину пластини в точці $(x; y)$.

Розіб'ємо довільним способом область D на частини D_i , які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких дорівнюють ΔS_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Візьмемо довільну точку $P_i(\xi_i; \eta_i) \in D_i$ і знайдемо густину в цій точці $\gamma(P_i) = \gamma(\xi_i; \eta_i)$. Тоді маса ча-

стини D_i дорівнює добутку $\gamma(P_i) \cdot \Delta S_i$, а значення маси m всієї пластини наближено дорівнює сумі:

$$m \approx m_n = \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i. \quad (3)$$

Точне значення маси одержимо як границю суми (3) при $\lambda \rightarrow 0$, тобто:

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} m_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i. \quad (4)$$

Отже, різні за змістом задачі приводять до знаходження границь одного й того ж виду. Кожна з таких границь називається подвійним інтегралом. У зв'язку з цим виникає потреба у вивченні властивостей цих границь, незалежно від змісту тієї чи іншої задачі.

Означення подвійного інтеграла

Нехай функція $f(x, y)$ визначена в замкненій обмеженій області $D \subset R^2$. Розіб'ємо область D довільним чином на n частин D_i , площі яких дорівнюють ΔS_i ($i = 1, 2, \dots, n$); $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(D_i)$ – найбільший з діаметрів областей D_i . Виберемо в кожній області D_i довільну точку $P_i(\xi_i; \eta_i)$ і складемо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i, \quad (5)$$

яку назвемо інтегральною сумою для функції $f(x, y)$ по області D .

Якщо інтегральна сума (5) при $\lambda \rightarrow 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття області D на частинні області D_p , ні від вибору точок P_p , то ця границя називається подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i. \quad (6)$$

Функція $f(x, y)$ називається інтегрованою в області D ; D – область інтегрування; x, y – змінні інтегрування; $dx dy$ – елемент площі.

Геометричний зміст подвійного інтеграла:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy \text{ – об'єм циліндричного тіла.}$$

Механічний зміст подвійного інтеграла:

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy \text{ – маса матеріальної пластини.}$$

Теорема (достатня умова інтегровності функції)

Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D , то вона інтегровна в цій області.

Надалі вважатимемо, що підінтегральна функція $f(x, y)$ в області інтегрування D є неперервною.

Властивості подвійного інтеграла

- $\iint_D C \cdot f(x, y) dx dy = C \cdot \iint_D f(x, y) dx dy, \quad C - \text{const.}$
- $\iint_D (f(x, y) \pm g(x, y)) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy \pm \iint_D g(x, y) dx dy.$

Властивість справедлива для скінченного числа функцій.

$$3. \iint_D f(x, y) dx dy \geq 0, \text{ якщо } f(x, y) \geq 0 \text{ в області } D.$$

$$4. \iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy, \text{ якщо } f(x, y) \geq g(x, y)$$

в області D .

$$5. \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy,$$

де D_1, D_2 – області, на які розбито область інтегрування D .

$$6. mS \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq MS, \text{ де } S \text{ – площа області } D;$$

m, M – відповідно найменше і найбільше значення підінтегральної функції в області D .

Обчислення подвійних інтегралів

1) Область інтегрування D обмежена зліва і справа прямими $x = a$ і $x = b$ ($a < b$), а знизу і зверху – неперервними кривими $y = \varphi_1(x)$ і $y = \varphi_2(x)$ ($\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$) (рис. 3).

Тоді обчислення інтеграла (6) зводиться до обчислення повторного інтеграла за формулою:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (7)$$

2) Область інтегрування D обмежена знизу і зверху прямими $y = c$ і $y = d$ ($c < d$), а зліва і справа – неперервними кривими $x = \psi_1(y)$ і $x = \psi_2(y)$ ($\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$) (рис. 4). Для такої області подвійний інтеграл (6) обчислюється за

формулюю:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx. \quad (8)$$

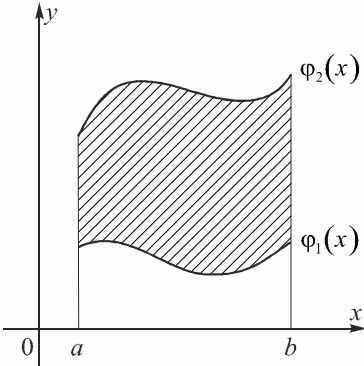


Рис. 3

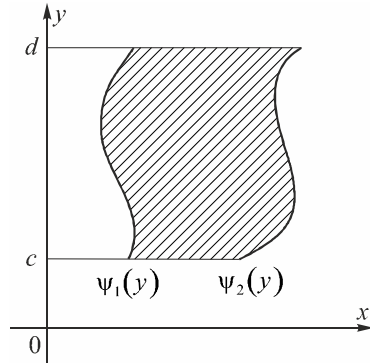


Рис. 4

Приклад 1. Обчислити подвійні інтеграли, взяті по прямокутних областях.

а) $\iint_D e^{x+y} \, dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$;

$$\iint_D e^{x+y} \, dx dy = \iint_D e^x \cdot e^y \, dx dy = \int_0^1 e^x dx \int_0^1 e^y dy = e^x \Big|_0^1 \cdot e^y \Big|_0^1 = (e-1)^2.$$

б) $\iint_D x^2 y \cdot \cos(xy^2) \, dx dy$, $D: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 2$;

$$\begin{aligned}
 \iint_D x^2 y \cdot \cos(xy^2) dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x^2 dx \cdot \int_0^2 2y \cos(xy^2) dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x^2 dx \cdot \frac{1}{x} \sin(xy^2) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin 4x dx = \\
 &= \left[\begin{array}{l} x = u, \quad dx = du, \\ \sin 4x dx = dv, \quad v = -\frac{1}{4} \cos 4x \end{array} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{4} \cos 4x \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos 4x dx \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{8} \cos 2\pi + \frac{1}{16} \cos 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{8} + \frac{1}{16} (\cos 2\pi - \cos 0) \right) = -\frac{\pi}{16}.
 \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити повторні інтеграли.

$$\text{а) } \int_0^1 dx \int_x^{2x} (x - y + 1) dy = \int_0^1 dx \left((x+1) \cdot y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_x^{2x} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \left(2x^2 + 2x - 2x^2 - \left(x^2 + x - \frac{x^2}{2} \right) \right) dx = \\
 &= \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{2} + x \right) dx = \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б)} \quad & \int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 x^2 dx \cdot \left(-\frac{1}{y} \right) \Big|_{\frac{1}{x}}^x = \\
 &= -\int_1^2 x^2 dx \cdot \left(\frac{1}{x} - x \right) = \int_1^2 (x^3 - x) dx = \\
 &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 4 - 2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = 2\frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в)} \quad & \int_2^4 dy \int_0^y \frac{y^3}{x^2 + y^2} dx = \int_2^4 y^3 dy \int_0^y \frac{dx}{x^2 + y^2} = \\
 &= \int_2^4 y^3 dy \cdot \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \Big|_0^y = \int_2^4 y^2 (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) dy = \\
 &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_2^4 = \frac{\pi}{12} (4^3 - 2^3) = \frac{14\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

Приклад 3. Змінити порядок інтегрування в наступних інтегралах:

$$\text{а) } I_1 = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

Зобразимо область інтегрування, яка визначається лініями: $y = 0$, $y = 1$, $x = y$, $x = \sqrt{y}$ (рис. 5). Змінивши порядок інтегрування, отримаємо нові межі: $x = 0$, $x = 1$, $y = x^2$, $y = x$, тобто

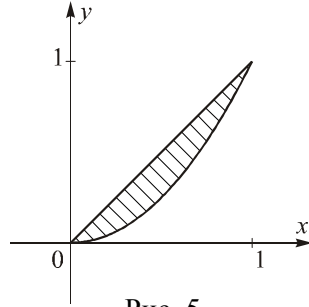


Рис. 5

$$I_1 = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy.$$

$$\text{б) } I_2 = \int_{-1}^0 dx \int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

Початкові межі: $x = -1$, $x = 0$, $y = x + 1$, $y = \sqrt{1 - x^2}$ (рис. 6); виразимо нові межі інтегрування $x = y - 1$, $x = -\sqrt{1 - y^2}$, $y = 0$, $y = 1$. Отже,

$$I_2 = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1} f(x, y) dx.$$

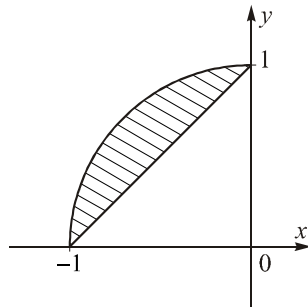


Рис. 6

$$\text{в) } I_3 = \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy.$$

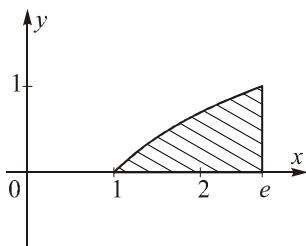


Рис. 7

Область інтегрування зображено на рис. 7, звідки знаходимо нові межі: $y = 0$, $y = 1$, $x = e^y$, $x = e$, тому

$$I_3 = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx.$$

Приклад 4. Змінивши порядок інтегрування, записати заданий вираз у вигляді одного двократного інтеграла.

$$\text{а) } I_1 = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dx + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy.$$

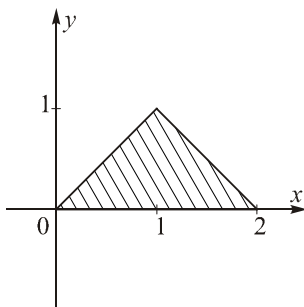


Рис. 8

Область інтегрування зображено на рис. 8. Змінимо порядок інтегрування та запишемо заданий інтеграл як один двократний:

$$I_1 = \int_1^2 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx.$$

$$\text{б) } I_2 = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy.$$

ЗМІСТ

Лекція 1. Подвійний інтеграл: означення, властивості, обчислення	3
Лекція 2. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Полярні координати. Застосування подвійного інтеграла до задач геометрії, механіки	16
Лекція 3. Означення та обчислення потрійних інтегралів	32
Лекція 4. Циліндричні та сферичні координати. Застосування потрійного інтеграла	45
Лекція 5. Криволінійний інтеграл I роду: означення та обчислення	60
Лекція 6. Обчислення та застосування криволінійних інтегралів II роду. Формула Гріна. Інтегрування повних диференціалів	78
Лекція 7. Поверхневі інтеграли	101
Лекція 8. Формули Остроградського-Гаусса і Стокса. Елементи теорії поля	127
Список літератури	147

