ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Математичне моделювання процесів і явищ у різних галузях науки й техніки є одним із основних способів отримання нових знань та розвитку нових технологій. При здійсненні математичного моделювання сучасний інженер, незалежно від його спеціалізації, має володіти мінімальним набором алгоритмів обчислювальної математики, а також способами їх програмної реалізації на сучасних персональних комп'ютерах (ПК).

Цей підручник був створений на основі курсу лекцій із дисциплін «Чисельні методи» та «Прикладна математика» і пройшов апробацію у закладах вищої освіти України.

Головне призначення запропонованого підручника – викладення основ сучасних методів обчислювальної математики на базі загального курсу «Вищої математики» з метою реалізації чисельних методів із застосуванням сучасних комп'ютерних технологій. Підручник рекомендовано для студентів закладів вищої освіти спеціальностей «Комп'ютерна інженерія», «Комп'ютерні науки», «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», «Екологія», «Науки про землю», «Гірництво», «Теплоенергетика» тощо.

Підручник складається із семи розділів. У першому розділі представлено основні етапи розв'язування задач чисельними методами. Викладено елементи теорії похибок. У другому й третьому розділах розглянуто основні чисельні методи розв'язування лінійних і нелінійних рівнянь. Для систем лінійних алгебраїчних рівнянь – це метод Гаусса, метод LU-розкладу, ітераційні методи. Для нелінійних рівнянь розглянуто метод простої ітерації та метод Ньютона з умовами їх збіжності. Четвертий і п'ятий розділи присвячено питанням чисельної інтерполяції та чисельного інтегрування функцій. При цьому розглянуто питання застосування сплайн-апроксимації функцій. У шостому та сьомому розділах викладено основні підходи до побудови чисельних алгоритмів розв'язку диференціальних рівнянь. Розглянуто однокрокові та багатокрокові методи розв'язування диференціальних рівнянь. Показано застосування чисельних методів розв'язку диференціальних рівнянь для задач, що виникають у сучасній техніці. При викладенні матеріалу у всіх розділах посібника детально приведено приклади та підходи застосування методів до розв'язку конкретних задач з представленням відповідного графічного матеріалу.

Навчальний матеріал може також використовуватися при проведенні обчислювального практикуму на сучасних ПК.

Розділ I
ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ЩОДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЧИСЕЛЬНИМИ МЕТОДАМИ

§ 1.1 Основні етапи розв'язування задач чисельними методами

Більшість прикладних задач (інженерних, економічних, біологічних та ін.), результат яких має представляти числову інформацію, зводиться до математичних задач, що надалі розв'язуються обчислювальними методами. Послідовність реалізації таких задач можна представити у вигляді наступних етапів.

1.1.1 Постановка та математична модель задачі

Постановка задачі припускає змістовно-словесне формулювання задачі, умов, при яких вона ставиться, та вимог до її розв'язку.

Наприклад:

а) розв'язати квадратне рівняння;

б) визначити зміну швидкості при падінні тіла із врахуванням опору середовища;

в) знайти площу ділянки землі;

г) організувати випуск продукції підприємства з найбільшим прибутком, зважаючи на наявні ресурси.

Для розв'язування кожної поставленої задачі складається *математична модель*, яка визначає необхідні математичні величини, що описують вихідну задачу та математичні співвідношення між відповідними величинами. В одних випадках запис математичної моделі не представляє труднощів, в інших випадках необхідне уточнення постановки задачі, визначення головних факторів та нехтування умовами, які слабо впливають на досліджуваний процес.

Для задачі **а)** математична модель очевидна. Розв'язати рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, де a, b, c – задані дійсні числа, причому $a \neq 0$. Величина x є невідомою, яка знаходиться.

У задачі б) вважається, що тіло є матеріальною точкою масою m. Необхідно виявити сили, що впливають на падіння тіла, та встановити залежність сили опору від вказаних величин. Якщо вважати, що на тіло діє сила ваги $F_1 = mg$ і сила опору пропорційна швидкості падіння, тобто $F_2 = -kv$, то на основі законів механіки отримаємо рівняння

$$ma = mg - kv \text{ або } \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v.$$

Це рівняння із врахуванням початкової умови в момент часу $t = t_0 - v(t_0) = v_0$ являє собою математичну модель вихідної задачі.

У задачі **в)** спочатку потрібно визначити форму ділянки землі, його границі, представити ділянку в системі координат при відповідному масштабі (при цьому можна знехтувати незначними площами, що дає можливість більш простого графічного представлення). Тоді задача зводиться до обчислення визначеного інтеграла $\int_a^b \left[y_2(x) - y_1(x)\right] dx$, який і є математичною моделлю даної задачі (рис. 1.1).

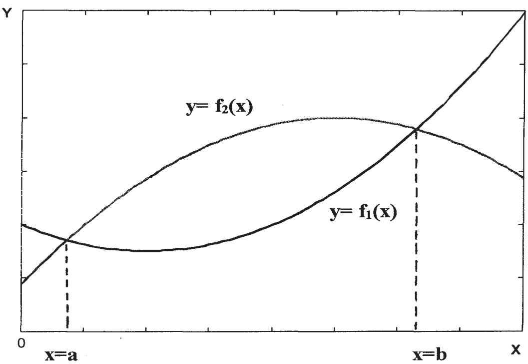

Рис. 1.1

При постановці задачі **г)** вважається, що підприємство випускає n видів продукції $П_1, П_2,..., П_n$ і при цьому витрачає m видів ресурсів (сировина, матеріали, трудові ресурси і т. д.) $A_1, A_2,..., A_m$. Відомі витрати α_{ij} ресурсів i-го виду на одиницю продукції j-го виду, обсяг b_i ресурсів i-го виду і величина прибутку c_j від реалізації одиниці продукції j-го виду. Позначимо через $x_1, x_2,..., x_n$ – кількість одиниць випущеної продукції відповідно видів $П_1, П_2,..., П_n$. Прибуток від випуску всієї продукції становить $z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... c_nx_n$. Математичну модель даної задачі можна сформулювати наступним чином: знайти найбільше значення функції z при обмеженнях

$$\sum_j \alpha_{1j} x_j \le b_1, \sum_j \alpha_{2j} x_j \le b_2, ..., \sum_j \alpha_{mj} x_j \le b_m,$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0.$$

Отже, усі сформульовані задачі представлені математичними співвідношеннями і зводяться до чисто математичних задач.

У загальному випадку математична модель абстрагована від конкретної суті прикладної задачі. Одна і та ж математична модель може описувати різні прикладні задачі.

Зокрема, задача **б)** звелася до розв'язку диференціального рівняння, яка може бути моделлю і для описання інших процесів (зміна швидкості при пружних лінійних коливаннях, зміна струму в заданій електричній мережі, зміна швидкості при розмноженні бактерій і т. д.).

Для розв'язку задачі **в)** необхідно обчислити визначений інтеграл. До обчислення визначеного інтеграла призводять задачі знаходження об'єму тіла, знаходження довжини дуги кривої, визначення статичного моменту або моменту інерції в теорії опору матеріалів, розрахунку роботи змінної сили у фізичних задачах і т. д.

Математична модель задачі **г)** зводиться до розв'язку системи нерівностей, що задовольняють заданим вимогам. При цьому розв'язок задачі зводиться до багаторазового розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Варто зазначити, що розв'язок багатьох прикладних задач також зводиться до розв'язку систем лінійних рівнянь.

1.1.2 Вибір чисельного методу

Вибір чисельного методу для даної задачі є важливим етапом процесу розв’язку вихідної задачі, який суттєво впливає на кінцевий результат. На цьому етапі математичну модель перетворюють до такого вигляду, щоб до неї входили лише ті операції, які можуть використовувати електронно-обчислювальні машини (ЕОМ), зокрема персональні комп’ютери (ПК). Такі перетворення виконують за допомогою методів, які називають *чисельні методи* або *методи обчислень*. Як наслідок, отримують нову дискретну модель (на відміну від вихідної неперервної моделі). Далі дискретною моделлю складається алгоритм та програма для ПК.

1.1.3 Алгоритм методу

Алгоритмом методу називається система правил, яка задає строго визначену послідовність операцій, що призводять до шуканого результату (точного чи наближеного).

Послідовність розв’язку будь-якої обчислювальної задачі представляється алгоритмом. Розглянемо один з найпростіших алгоритмів – алгоритм розв’язку квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ (задача **а)**).

Вважаємо, що розв’язок рівняння можна отримати за формулами

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}.$$

Словесно-формальний опис алгоритму знаходження розв’язку має наступний вигляд:

1) обчислити величину $-\dfrac{b}{2a}$;

2) обчислити $D = \left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{c}{a}$;

3) якщо $D \geq 0$, то перейти до пункту 4, в іншому разі – до пункту 6;

4) обчислити $x_1 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{D}$, $x_2 = -\frac{b}{2a} - \sqrt{D}$;

5) кінець обчислень;

6) вважається, що $x_1 = -\frac{b}{2a} + i\sqrt{D}, x_2 = -\frac{b}{2a} - i\sqrt{D}$. Перехід до пункту 5.

1.1.4 Реалізація алгоритму та аналіз отриманих результатів

На цьому етапі за дискретною моделлю складається програма для ПК на одній з алгоритмічних мов високого рівня (ФОРТРАН, ПАСКАЛЬ, БЕЙСІК і т. д.). Тут треба зауважити, що рівень сучасного математичного забезпечення для ПК дає змогу користувачу уникнути трудомісткого шляху, коли при програмуванні дискретну модель доводиться «розписувати» аж до елементарних арифметичних та логічних операцій. На допомогу приходять сучасні математичні комп'ютерні пакети прикладних програм – Mathematica, MatCad, Maple, MATLAB, що дозволяють реалізувати дискретну модель застосуванням відповідної підпрограми. Розрахунки за відомими програмами та підпрограмами подаються у вигляді набору числових даних (стовпчики, масиви чисел, таблиці і т. д.), що не є зручним та наочним способом аналізу результатів. У багатьох випадках доцільніше використання графічних програмних засобів для візуалізації отриманих даних. Зокрема, графічне представлення числових результатів ефективно реалізують математичні пакети типу Maple і MATLAB.

§ 1.2 Елементи теорії похибок обчислень

Класифікація похибок. Під час розв'язування прикладних задач чисельними методами на ПК маємо справу з наближеними обчисленнями. Похибки, що виникають у процесі обчислень, обумовлені трьома причинами:

1) похибки вихідних даних (незсувна похибка), обумовлені фізичними допущеннями при побудові математичної моделі та