Зміст

Частина II

ПРОЕКТИВНА ГЕОМЕТРІЯ

ВІДПОВІДІ І ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

Передмова

Навчальний посібник написано у повній відповідності зі змістом розділів «Основи геометрії», «Проективна геометрія», «Методи зображень» діючої програми курсу геометрії для фізико-математичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів.

Посібник складається з трьох частин:

Частина І. Основи геометрії.

Частина ІІ. Проективна геометрія.

Частина ІІІ. Методи зображення просторових фігур.

У багатьох навчальних посібниках з основ геометрії елементи геометрії Лобачевського викладаються після ознайомлення з системою аксіом Д. Гільберта, при цьому часто з використанням останніх. У студентів складається враження, що Лобачевський при створенні своєї неевклідової геометрії також використовував аксіоматику Гільберта, що, звичайно, не відповідає істині.

Тому в даному посібнику елементи геометрії Лобачевського викладено відповідно до історичної послідовності розвитку геометричних ідей, тобто перед обґрунтуванням евклідової геометрії на основі аксіоматики Гільберта.

Такий підхід надає можливість студентам зрозуміти роль, яку відіграє в побудові геометрії та чи інша аксіома, зокрема аксіома паралельних, при збереженні всіх інших аксіом геометрії Евкліда. З огляду на це стає зрозумілим постановка питання про несуперечливість, незалежність і повноту системи аксіом, про причини і мотиви виникнення і розробки аксіоматичного методу побудови як евклідової геометрії, так і неевклідової геометрії Лобачевського.

Завершення логічного обґрунтування геометрії Евкліда дано після ознайомлення з елементами геометрії Лобачевського (частина І, розділ 2).

Розглянуто різні шляхи обґрунтування евклідової геометрії, проаналізовано систему аксіом Гільберта, векторну систему аксіом Г. Вейля (частина І, розділ 3), систему аксіом О.В. Погорєлова (частина І, розділ 4).

Проведено детальне дослідження несуперечливості, незалежності і повноти системи аксіом Погорєлова у декартовій реалізації, системи аксіом Г. Вейля в арифметичній реалізації, наведено доведення несуперечливості геометрії Лобачевського в інтерпретації Бельтрамі – Клейна і Пуанкаре (частина І, розділ 5).

Відомості про геометрію Рімана, її реалізації на сфері викладені у розділі 6 (частина І).

Проведено аналіз різних підходів до аксіоматичної побудови шкільного курсу геометрії, наведено системи аксіом Л.С. Атанасяна, О.Д. Александрова, О.В. Погорєлова (частина І, розділ 7).

До кожного розділу сформульовані контрольні запитання.

В основу побудови курсу *проективної геометрії* (частина ІІ) покладено ідею геометричних перетворень. Автори не ставили за мету виклад елементарних геометричних перетворень, у тому числі й афінних перетворень, з якими студенти ознайомились у курсі аналітичної геометрії, а розпочали викладення матеріалу з вивчення властивостей центрального проектування, інваріанти якого лежать в основі проективної геометрії (частина І, розділ 1).

Поняття проективного простору введено шляхом розширення евклідового простору – доповненням його невласними точками, невласними прямими, невласною площиною (частина І, розділ 2).

Побудований таким чином проективний простір має всі властивості, необхідні для обґрунтування і розвитку проективних понять. Крім того, такий підхід до побудови проективного простору надає можливість тісно пов’язати нові поняття і теореми проективної геометрії з відповідним матеріалом евклідової геометрії, що полегшує сприймання студентами нових проективних понять.

Такий підхід реалізовано і при викладенні проективної теорії ліній другого порядку (частина ІІ, розділ 3). Вивчення проективної відповідності у формах другого ступеня (частина ІІ, розділ 4) ґрунтується на означенні проективної відповідності через гармонійну четвірку точок (прямих) по Штейнеру.

Далі дано порівняльну характеристику різних геометрій із групової точки зору, показано можливість реалізації афінної та евклідової геометрій на проективній площині. Наведені також короткі історичні відомості про розвиток ідей проективної геометрії (частина ІІ, розділ 5).

Методи зображення просторових фігур (частина ІІІ) ґрунтуються на проекційних методах, причому проектування виконується або центральною, або паралельною в’язкою (пучком) прямих.

Одним із основних методів пізнання природи, законів її розвитку, дослідження явищ і процесів є *моделювання*, при якому людина створює фізичну або математичну модель певного процесу чи явища.

Математичні моделі виражаються рівняннями, формулами, які характеризують основні властивості пізнавальних об'єктів. У школі геометричні моделі подані у вигляді рисунків, які є наочним засобом вивчення оригіналу.

Неможливо досить чітко уявити собі просторовий об'єкт за його навіть повним словесним описом, який не може замінити рисунок, побудований за певними геометричними правилами. Зображення просторових фігур є найефективнішим засобом розвитку в учня, студента просторових уявлень, без яких неможливе вивчення просторових фігур.

Як у шкільній практиці, так і у викладанні геометрії у вищих навчальних закладах виникають певні труднощі, пов'язані з виконанням зображень просторових фігур. Проблема зображення тіл та їх використання в навчальному процесі має суттєве й до того ж подвійне значення при викладанні геометрії. З одного боку, зображення геометричних фігур і вивчення їх властивостей забезпечує *наочність* у викладанні геометрії, а також конкретність у практичному використанні. У цьому випадку геометричне зображення відіграє *ілюстративну роль*, тому й називається *ілюстративним*. З іншого боку, зображення фігур можна використовувати як засіб розв'язування задач. Тоді маємо справу з *рисунком розв'язувальним*.

В обох випадках для зображення геометричної фігури користуються методом проектування, тому одержані зображення називаються *проекційним рисунком*.

Залежно від призначення і застосування проекційних рисунків випливають різні вимоги до них. Для ілюстративних рисунків важливе значення має *наочність* і *простота* виконання, тоді як для розв'язувальних рисунків необхідна достатня *повнота* і *точність* відповідного зображення.

У цій частині посібника проаналізовані загальні вимоги до зображення просторових фігур на площині, сутність і властивості центрального і паралельного проектування (частина III, розділ 1).

Окремими розділами виділені «Метод Монжа» (частина III, розділ 2), «Метод аксонометрії» (частина III, розділ 3), «Метод лінійної перспективи» (частина III, розділ 4), «Метод основної площини» (частина III, розділ 5). У кожному з цих розділів розглянуто суть методу та його застосування до зображення просторових фігур, до розв'язування задач.

У кожній частині посібника викладено короткі історичні відомості стосовно змісту відповідної частини. Можливо, матеріал посібника дещо ширший від того, що можна викласти у відведені навчальним планом години на вивчення геометрії, але надлишковий матеріал може бути використаний студентами при написанні курсових і дипломних робіт.

Викладення теоретичного матеріалу супроводжується прикладами і задачами на застосування теорії, що допоможе читачеві краще її засвоїти. До вправ, винесених на самостійне опрацювання, подані детальні вказівки щодо їх розв'язання.

Посібник написаний на основі багаторічного досвіду авторів у викладанні геометрії в педагогічних університетах.

Частина I

ОСНОВИ ГЕОМЕТРІЇ

1 Розділ

Історичний нарис обґрунтування геометрії

§ 1. Предмет основ геометрії

У геометрії весь матеріал викладається у вигляді строгої послідовності чітко сформульованих тверджень – означень і теорем.

Теоремою називається твердження, істинність якого встановлюється за допомогою доведення, тобто міркувань, основаних на законах логіки.

Означення – це твердження, в якому пояснюється зміст того чи іншого поняття.

У курсі геометрії всі теореми розміщуються в певній послідовності. При доведенні n-ї теореми як аргумент використовують $(n-1)$ раніше доведених тверджень. При доведенні $(n-1)$-ї теореми використовуються $(n-2)$ попередніх тверджень і т.д. Цей процес не є нескінченним. Через скінченну кількість кроків прийдемо до таких тверджень, для обґрунтування яких уже немає початкових тверджень.

Тому для того, щоб можна було проводити доведення теорем, деякі твердження беруться без доведення. Такі твердження називаються *аксіомами*. Тоді, виходячи з аксіом, за допомогою логічних умовиводів переходять від однієї теореми до іншої.

Аналогічна ситуація і з означеннями. Як не можна довести всі без винятку твердження, так не можна й означити всі поняття. Кожне нове поняття означається через інші, введені раніше. У результаті прийдемо до таких понять, які не можна означити, їх приймають без означень і називають *основними поняттями*. Аксіоми і основні поняття не можуть вибиратись незалежно одне від одного. В аксіомах стверджуються властивості основних понять.

Таким чином, аксіоматична будова геометрії здійснюється за такою схемою:

1. Вводяться основні поняття.
2. Дається система аксіом, які визначають основні поняття.
3. За допомогою основних понять означаються нові поняття, а на основі аксіом доводяться нові твердження як теореми.

Перелік основних понять і аксіом, достатніх для строго логічного означення всіх інших понять геометрії і доведення всіх тверджень про ці поняття, називається *обґрунтуванням геометрії*.

При цьому виникають такі запитання:

1. Які поняття вибрати основними, а які означати через основні?
2. Які твердження геометрії взяти за аксіоми?
3. Як треба здійснювати вибір основних понять і аксіом, щоб з них можна було за допомогою логічних міркувань розвинути всю геометричну теорію?

На всі ці запитання дає відповідь наука, яка називається основами геометрії. Отже, *основи геометрії* – це наука, предметом вивчення якої є обґрунтування геометрії.

Питання про обґрунтування геометрії тісно пов'язане з її історією. Тому зупинимось коротко на деяких історичних етапах її розвитку.

§ 2. Геометрія до Евкліда

1. Геометрія на Стародавньому Сході

Геометрія виникла і розвивалась під впливом життєвих потреб людей. Перші відомості з геометрії були здобуті на Стародавньому Сході – в Єгипті, Вавилоні, Китаї, Індії – у зв'язку з розвитком землемірства. Найбільших успіхів у цьому напрямку досягли в Стародавньому Єгипті. Про це свідчать кілька єгипетських папірусів, у яких містяться геометричні відомості. Найбільш важливі з них – папірус Рінда, який зберігається в Британському музеї, та Московський папірус, розшифрований знаменитим російським єгиптологом В.В. Струве.

Як свідчать ці папіруси, єгиптяни знали правила обчислення площ многокутників, площі круга, уміли обчислювати об'єми ряду многогранників.

Число π обчислювали досить точно: $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16\ldots$

У Московському папірусі наведено правило для обчислення об'єму зрізаної піраміди, яке повністю збігається з сучасною формулою,

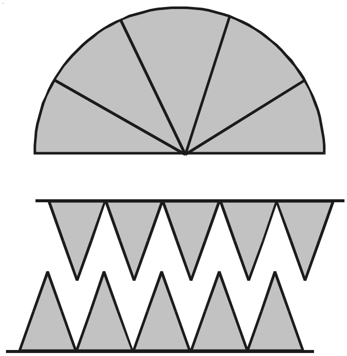

Рис. 1.1

а в одному місці Струве знайшов навіть правило для обчислення площі сфери.

Встановлено, що у Вавилоні досить давно знали теорему Піфагора.

Такі значні досягнення не могли бути одержані чисто емпіричним шляхом. Очевидно, єгипетським жрецям і писарям, у чиїх руках знаходились всі наукові дослідження, були відомі деякі теоретичні геометричні викладки. Але все ж геометрія Стародавнього Сходу носила в основному емпіричний характер і містила зібрання розв'язків окремих задач, правил для знаходження площ, об'ємів тощо. При обґрунтуванні геометричних тверджень звертались до інтуїції або до спостереження, логічних доведень у нашому розумінні ще не знали. Всі обґрунтування зводились до рисунка, під яким стояв напис: «Дивись». Наприклад, індуський математик Ганеші твердження «площа круга дорівнює добутку половини довжини кола на радіус» обґрунтовує рисунком 1.1.

2. Геометрія у Стародавній Греції

Застій і спад економіки Єгипту загальмували подальший розвиток геометрії в цій країні. Поступово центр математичної культури переміщується в Грецію, де в VII–VI ст. до н.е. бурхливо розвивається мореплавство, міське будівництво, зароджується астрономія і фізика. Елементарні методи безпосереднього спостереження, доведення на основі інтуїції вже не могли розв'язати поставлені перед геометрією складні задачі. Треба було відірвати геометрію від задач вимірювання реальних об'єктів і надати їй теоретичного характеру. Вирішення цього завдання взяла на себе *школа Фалеса*.

Фалес (640–548 рр. до н.е.) – представник Мілетської школи, знаменитий філософ і математик. Школа Фалеса розпочала теоретичні дослідження і ввела в геометрію логічні доведення тверджень. Зокрема, Фалесу приписують доведення властивості кутів при основі рівнобедреного трикутника, властивості вертикальних кутів і знаменитої теореми Фалеса, яка вивчається в основній школі.

У подальшому геометрами Стародавньої Греції були здобуті важливі результати, які охоплюють майже весь зміст сучасної елементарної геометрії.

Так, ***Піфагор*** (близько 580–500 рр. до. н.е.) і його школа відкрили теорему про суму кутів трикутника, довели відому теорему Піфагора, існування п'яти типів правильних многогранників. Одним з найвидатніших досягнень школи Піфагора є відкриття несумірних відрізків, що зумовило першу кризу в математиці. Відомі грекам раціональні числа виявились недостатніми для вираження міри довільних відрізків. Грецькі вчені-математики дійшли висновку, що геометрична неперервна величина є більш загальним поняттям, ніж число; геометрія – більш загальна наука, ніж наука про число: вона повинна розвиватися незалежно від науки про число, бути панівною.

Пізніше ***Евдокс*** (410–356 рр. до н.е.) створив геометричну теорію пропорцій, яка замінила грекам теорію ірраціональних чисел, яких вони не знали. Теорія Евдокса дала можливість подолати кризу в математиці, пов'язану з відкриттям несумірних відрізків. Метод Евдокса дозволив вимірювати відрізки з будь-якою точністю. Крім того, Евдокс відкрив метод вичерпування: «*Якщо від величини A відняти* $^1/_2$ *A або більше, з остачею проробити те саме і т.д., то можна дістати таку величину, яка менша будь-якої наперед заданої*». Користуючись цим методом, Евдокс знаходить об'єми піраміди, конуса, кулі.

Учень Евдокса ***Менехм*** (близько 360 р. до н.е.), розв'язуючи задачу про подвоєння куба, відкрив конічні перерізи – еліпс, гіперболу, параболу, теорію яких потім розробив інший грецький математик – ***Аполлоній***.

Архімед (287–212 рр. до н.е.) – великий грецький математик, астроном і філософ, знайшов правила для обчислення площі параболи, об'єму і поверхні кулі, одержав досить точне наближення числа π: $\pi = \frac{22}{7} = 3{,}143\ldots$

Таким чином, протягом кількох століть старогрецькими математиками був накопичений величезний запас геометричних знань. Постало завдання їх систематизації і приведення в логічну систему. Заслугою старогрецьких математиків є те, що вони поставили таке завдання і успішно його вирішили. Постановка задачі про логічне обґрунтування геометрії пов'язана з іменем Платона.

Платон (427–347 рр. до н.е.) вважав, що в будь-якій галузі знань необхідно виділяти основні поняття і твердження, з яких всі інші поняття і твердження повинні випливати як логічні наслідки. Але оскільки Платон був ідеалістом, то все його вчення побудоване на напівмістичній основі, а загальний задум логічної будови науки чітко не сформульований.

Навчальне видання

Боровик Василь Наумович
Яковець Василь Павлович

Курс вищої геометрії

Навчальний посібник

Директор видавництва Р.В. Кочубей
Головний редактор В.І. Кочубей
Технічний редактор Н.Ю. Курносова
Дизайн обкладинки і макет В.Б. Гайдабрус
Комп'ютерна верстка О.В. Бердинськиx, Д.І. Іовенко

ТОВ «ВТД «Університетська книга»
40030, м. Суми, вул. Кірова, 27
Тел.: (0542) 27-51-43
E-mail: publish@book.sumy.ua

Відділ реалізації
Тел./факс: (0542) 21-26-12, 21-11-25
E-mail: info@book.sumy.ua

Підписано до друку 23.09.04.
Формат 70x90 1/16. Папір офсетний. Гарнітура Скулбук.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 36,4. Обл.-вид. арк. 34,65.
Тираж 1000 прим. Замовлення № 3742

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції ДК № 489 від 18.06.2001

Надруковано відповідно до якості
наданих діапозитивів у друкарні «Торнадо»
Україна, 61045, м. Харків, вул. Отакара Яроша, 18