

Зміст

Передмова	9
-----------------	---

Частина I

ОСНОВИ ГЕОМЕТРІЇ

Розділ 1. Історичний нарис обґрунтування геометрії.....	14
§ 1. Предмет основ геометрії	14
§ 2. Геометрія до Евкліда	15
§ 3. «Початки» Евкліда	18
§ 4. Критика системи Евкліда	20
§ 5. Спроби доведення V постулату	21
§ 6. Дослідження Саккері, Ламберта і Лежандра	25
§ 7. Відкриття неевклідової геометрії	29
§ 8. Короткі відомості про життя і діяльність М.І. Лобачевського	31
<i>Контрольні запитання</i>	<i>33</i>
Розділ 2. Елементи геометрії Лобачевського.....	35
§ 9. Абсолютна геометрія і аксіома Лобачевського	35
§ 10. Паралельні прями на площині Лобачевського	36
§ 11. Властивості прямих на площині Лобачевського	39
§ 12. Функція Лобачевського	41
§ 13. Властивості трикутників на площині Лобачевського	43
§ 14. Поняття про еквідистанту	46
Основні властивості еквідистант	46
§ 15. Поняття про орицикл	48
Основні властивості орицикла	48
§ 16. Теореми про серединні перпендикуляри сторін трикутника та наслідки з них	51
<i>Контрольні запитання</i>	<i>53</i>
Розділ 3. Завершення логічного обґрунтування геометрії.....	55
§ 17. Проблема несуперечливості геометрії	55
§ 18. Система аксіом евклідової геометрії за Гільбертом	60
§ 19. Різні шляхи обґрунтування геометрії	64
§ 20. Векторне обґрунтування геометрії Евкліда	66
20.1. Система аксіом Вейля	66
20.2. Побудова геометрії за схемою Вейля.....	68
<i>Контрольні запитання</i>	<i>72</i>
Розділ 4. Сучасна аксіоматична побудова евклідової геометрії.....	73
§ 21. Основні поняття	73
§ 22. Аксіоми належності	74

§ 23. Аксиоми порядку	74
§ 24. Аксиоми міри для відрізків і кутів	77
§ 25. Аксиома існування трикутника, рівного даному	79
§ 26. Аксиома існування відрізка даної довжини	81
§ 27. Аксиома паралельних	82
§ 28. Просторові аксиоми	82
<i>Контрольні запитання</i>	84
Розділ 5. Дослідження системи аксіом геометрії	85
§ 29. Завдання обґрунтування системи аксіом	85
§ 30. Декартова реалізація системи аксіом евклідової геометрії (за О.В. Погореловим)	85
30.1. Несуперечливість системи аксіом евклідової геометрії	85
30.2. Повнота системи аксіом евклідової геометрії	88
30.3. Незалежність аксіоми існування відрізка заданої довжини .	90
30.4. Незалежність аксіоми паралельних	91
§ 31. Арифметична реалізація векторної системи аксіом Г. Вейля евклідової геометрії	91
31.1. Несуперечливість системи аксіом Г. Вейля евклідової геометрії для простору TE_3	91
31.2. Незалежність системи аксіом Г. Вейля	93
31.3. Повнота системи аксіом Вейля	95
§ 32. Доведення несуперечливості геометрії Лобачевського	96
32.1. Реалізація Бельтрамі – Клейна	97
32.2. Реалізація Пуанкаре	100
<i>Контрольні запитання</i>	104
Розділ 6. Елементи геометрії Рімана	106
§ 33. Поняття про геометрію Рімана	106
33.1. Аксиоми належності	107
33.2. Розміщення точок на прямій Рімана	108
§ 34. Елементи сферичної геометрії	110
34.1. Основні поняття сферичної геометрії	110
34.2. Відстань між двома точками на сфері	110
34.3. Сферичні трикутники	111
34.4. Сума кутів сферичного трикутника	114
34.5. Площа сферичного трикутника	116
34.6. Зовнішній кут сферичного трикутника	118
34.7. Поняття руху і рівності на сфері	118
§ 35. Несуперечливість планіметрії Рімана	120
§ 36. Різні геометрії і реальний простір	124
36.1. Поняття геометричного простору	124
36.2. Поняття про лінії і поверхні сталої кривини	126
36.3. Відстань між двома точками	127
<i>Контрольні запитання</i>	128

Розділ 7. Аксиоматика шкільного курсу геометрії	129
§ 37. Огляд різних підходів до аксіоматичної побудови шкільного курсу геометрії	129
§ 38. Система аксіом Л.С. Атанасяна	131
§ 39. Система аксіом О.Д. Александрова	134
§ 40. Система аксіом О.В. Погорелова	136
<i>Контрольні запитання</i>	142

Частина II

ПРОЕКТИВНА ГЕОМЕТРІЯ

Розділ 1. Побудова проєктивного простору	146
§ 1. Центральне проєктування в евклідовому просторі	146
§ 2. Побудова проєктивного простору	148
§ 3. Аксиоми евклідової геометрії	151
§ 4. Аксиоми проєктивної геометрії	153
§ 5. Аксиоми належності проєктивної геометрії	153
§ 6. Відношення порядку елементів проєктивного простору	158
6.1. Відношення порядку точок на проєктивній прямій	158
6.2. Аксиоми порядку проєктивної геометрії	161
6.3. Властивості відношення порядку на проєктивній площині	162
6.4. Відношення неперервності проєктивного простору	164
§ 7. Основні геометричні форми	165
§ 8. Принципи двоїстості в проєктивній геометрії	166
§ 9. Теорема Дезарга	168
§ 10. Конфігурація Дезарга	170
<i>Вправи</i>	174

Розділ 2. Основні поняття проєктивної геометрії форм першого ступеня	176
§ 11. Подвійне відношення чотирьох точок прямої	176
§ 12. Координати точки на проєктивній прямій	180
§ 13. Подвійне відношення чотирьох прямих пучка	182
§ 14. Перспективні ряди точок і пучки прямих	183
§ 15. Поняття проєктивної відповідності у формах першого ступеня	186
§ 16. Побудова проєктивної відповідності рядів і пучків	189
§ 17. Гармонізм точок ряду і прямих пучка	191
§ 18. Повний чотиривершинник	194
§ 19. Поняття повного чотиристоронника	198
§ 20. Проєктивні ряди (і пучки) із спільним носієм	199
§ 21. Інволюція	204
§ 22. Друга теорема Дезарга	209
§ 23. Геометрична інтерпретація інволюції	211
§ 24. Проєктивні відображення форм першого ступеня в координатах	213
24.1. Проєктивне відображення двох рядів точок у координатах	213

24.2. Інволюція в координатах	216
<i>Вправи</i>	220
Розділ 3. Лінії другого порядку на проєктивній площині	223
§ 25. Означення і основні властивості ряду точок другого порядку	223
§ 26. Теорема Паскаля	228
§ 27. Окремі випадки теореми Паскаля	230
§ 28. Конфігурація Паскаля – Паппа	233
§ 29. Означення і основні властивості пучка другого порядку. Теорема Бріаншона	234
§ 30. Полюс і поляра. Полярна відповідність	240
<i>Вправи</i>	244
Розділ 4. Проективні перетворення форм другого ступеня	247
§ 31. Колінеація плоских полів	247
§ 32. Гомології	249
§ 33. Проективні координати на площині	252
§ 34. Колінеація в координатах	256
§ 35. Поняття про кореляцію	259
§ 36. Рівняння проєктивної прямої	261
§ 37. Канонічні рівняння ліній другого порядку в проєктивних координатах. Проективна класифікація ліній другого порядку	264
<i>Вправи</i>	267
Розділ 5. Група проєктивних перетворень та її підгрупи	270
§ 38. Група проєктивних перетворень (колінеацій)	270
§ 39. Група афінних перетворень (як підгрупа групи проєктивних перетворень)	272
§ 40. Евклідова геометрія з проєктивної точки зору	277
§ 41. Група рухів	281
§ 42. Групова точка зору на геометрію	283
§ 43. Історичні відомості про розвиток ідей проєктивної геометрії	285
<i>Вправи</i>	290

Частина III

МЕТОДИ ЗОБРАЖЕННЯ ПРОСТОРОВИХ ФІГУР

Розділ 1. Загальні відомості про зображення фігур на площині	294
§ 1. Проекційні методи зображення	294
§ 2. Основні вимоги до зображення	295
§ 3. Центральне проєктування	298
§ 4. Паралельне проєктування	301
§ 5. Жорсткі та вільні зображення	305
§ 6. Паралельна проєкція кола	309
Розділ 2. Метод Монжа	311
§ 7. Поняття про метод Монжа	311

§ 8. Проекції точки на дві площини	313
§ 9. Система трьох площин проекцій. Проекції точки	316
§ 10. Проекції прямої	319
10.1. Прямі загального положення	319
10.2. Прямі, паралельні одній з трьох площин проекцій	320
10.3. Прямі, паралельні двом із трьох площин проекцій	322
10.4. Прямі, розміщені в площинах проекцій	323
§ 11. Сліди прямої	324
§ 12. Положення точки і прямої	326
§ 13. Взаємне положення двох прямих	327
13.1. Паралельні прямі	327
13.2. Прямі, що перетинаються	328
13.3. Мимобіжні прямі	329
§ 14. Площина	329
14.1. Задання площини на ешюрі	329
14.2. Характерні розміщення площини відносно площин проекцій	331
§ 15. Прямі лінії на площині	335
15.1. Пряма загального розміщення	336
15.2. Горизонталь площини	337
15.3. Фронталь площини	337
15.4. Профільна пряма	338
§ 16. Прямі в проєктуючих площинах	339
16.1. Горизонтально проєктуюча площина	339
16.2. Фронтально проєктуюча площина	340
§ 17. Точка на площині	341
§ 18. Взаємне розміщення двох площин	341
§ 19. Основні метричні задачі	342
<i>Вправи</i>	345
Розділ 3. Метод аксонометрії	347
§ 20. Основні поняття аксонометрії	347
§ 21. Коефіцієнти спотворення на аксонометричних осях	348
§ 22. Основна теорема аксонометрії	349
§ 23. Типи аксонометричних проєкцій	352
§ 24. Прямокутні аксонометричні проєкції	353
§ 25. Прямокутна ізометрична проєкція	356
§ 26. Прямокутна диметрична проєкція	357
§ 27. Зведені коефіцієнти спотворення	358
§ 28. Основні позиційні задачі	359
28.1. Задання точки	359
28.2. Задання прямої	361
28.3. Взаємне розміщення прямих	363
28.4. Задання площини	365
§ 29. Метричні задачі в аксонометрії	368
<i>Вправи</i>	371

Розділ 4. Метод лінійної перспективи	372
§ 30. Основні поняття лінійної перспективи	372
§ 31. Основні позиційні задачі	374
31.1. Лінійна перспектива точки	374
31.2. Лінійна перспектива прямої	375
31.3. Лінійна перспектива площини	379
§ 32. Метричні задачі	382
<i>Вправи</i>	384

Розділ 5. Метод основної площини	385
§ 33. Основні поняття методу основної площини	385
§ 34. Основні позиційні задачі	386
§ 35. Зображення просторових фігур	387
35.1. Зображення призми	388
35.2. Зображення піраміди	388
35.3. Зображення циліндра	389
35.4. Зображення конуса	390
35.5. Зображення зрізаного конуса	391
35.6. Зображення кулі	391
§ 36. Переріз многогранників площинами	393
36.1. Метод поділу n -кутної призми (піраміди) на трикутні	393
36.2. Метод слідів січних площин	393
36.3. Метод внутрішнього проектування	398
§ 37. Комбінації просторових фігур	404
§ 38. Історичні відомості про становлення методів зображення	412
<i>Вправи</i>	413

ВІДПОВІДІ І ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

Частина II	416
Розділ 1	416
Розділ 2	418
Розділ 3	428
Розділ 4	436
Розділ 5	441
Частина III	443
Розділ 2	443
Розділ 3	448
Розділ 4	451
Розділ 5	454
Список літератури	461

Передмова

Навчальний посібник написано у повній відповідності зі змістом розділів «Основи геометрії», «Проективна геометрія», «Методи зображень» діючої програми курсу геометрії для фізико-математичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів.

Посібник складається з трьох частин:

Частина I. Основи геометрії.

Частина II. Проективна геометрія.

Частина III. Методи зображення просторових фігур.

У багатьох навчальних посібниках з основ геометрії елементи геометрії Лобачевського викладаються після ознайомлення з системою аксіом Д. Гільберта, при цьому часто з використанням останніх. У студентів складається враження, що Лобачевський при створенні своєї неевклідової геометрії також використовував аксіоматику Гільберта, що, звичайно, не відповідає істині.

Тому в даному посібнику елементи геометрії Лобачевського викладено відповідно до історичної послідовності розвитку геометричних ідей, тобто перед обґрунтуванням евклідової геометрії на основі аксіоматики Гільберта.

Такий підхід надає можливість студентам зрозуміти роль, яку відіграє в побудові геометрії та чи інша аксіома, зокрема аксіома паралельних, при збереженні всіх інших аксіом геометрії Евкліда. З огляду на це стає зрозумілим постановка питання про несуперечливість, незалежність і повноту системи аксіом, про причини і мотиви виникнення і розробки аксіоматичного методу побудови як евклідової геометрії, так і неевклідової геометрії Лобачевського.

Завершення логічного обґрунтування геометрії Евкліда дано після ознайомлення з елементами геометрії Лобачевського (частина I, розділ 2).

Розглянуто різні шляхи обґрунтування евклідової геометрії, проаналізовано систему аксіом Гільберта, векторну систему аксіом Г. Вейля (частина I, розділ 3), систему аксіом О.В. Погорєлова (частина I, розділ 4).

Проведено детальне дослідження несуперечливості, незалежності і повноти системи аксіом Погорелова у декартовій реалізації, системи аксіом Г. Вейля в арифметичній реалізації, наведено доведення несуперечливості геометрії Лобачевського в інтерпретації Бельтрамі – Клейна і Пуанкаре (частина I, розділ 5).

Відомості про геометрію Рімана, її реалізації на сфері викладені у розділі 6 (частина I).

Проведено аналіз різних підходів до аксіоматичної побудови шкільного курсу геометрії, наведено системи аксіом Л.С. Атанасяна, О.Д. Александрова, О.В. Погорелова (частина I, розділ 7).

До кожного розділу сформульовані контрольні запитання.

В основу побудови курсу *проективної геометрії* (частина II) покладено ідею геометричних перетворень. Автори не ставили за мету виклад елементарних геометричних перетворень, у тому числі й афінних перетворень, з якими студенти ознайомились у курсі аналітичної геометрії, а розпочали викладення матеріалу з вивчення властивостей центрального проектування, інваріанти якого лежать в основі проективної геометрії (частина I, розділ 1).

Поняття проективного простору введено шляхом розширення евклідового простору – доповненням його невласними точками, невласними прямими, невласною площиною (частина I, розділ 2).

Побудований таким чином проективний простір має всі властивості, необхідні для обґрунтування і розвитку проективних понять. Крім того, такий підхід до побудови проективного простору надає можливість тісно пов'язати нові поняття і теореми проективної геометрії з відповідним матеріалом евклідової геометрії, що полегшує сприймання студентами нових проективних понять.

Такий підхід реалізовано і при викладенні проективної теорії ліній другого порядку (частина II, розділ 3). Вивчення проективної відповідності у формах другого ступеня (частина II, розділ 4) ґрунтується на означенні проективної відповідності через гармонійну четвірку точок (прямих) по Штейнеру.

Далі дано порівняльну характеристику різних геометрій із групової точки зору, показано можливість реалізації афінної та евклідової геометрій на проективній площині. Наведені також короткі історичні відомості про розвиток ідей проективної геометрії (частина II, розділ 5).

Методи зображення просторових фігур (частина III) ґрунтуються на проекційних методах, причому проектування виконується або центральною, або паралельною в'язкою (пучком) прямих.

Одним із основних методів пізнання природи, законів її розвитку, дослідження явищ і процесів є *моделювання*, при якому людина створює фізичну або математичну модель певного процесу чи явища.

Математичні моделі виражаються рівняннями, формулами, які характеризують основні властивості пізнавальних об'єктів. У школі геометричні моделі подані у вигляді рисунків, які є наочним засобом вивчення оригіналу.

Неможливо досить чітко уявити собі просторовий об'єкт за його навіть повним словесним описом, який не може замінити рисунок, побудований за певними геометричними правилами. Зображення просторових фігур є найефективнішим засобом розвитку в учня, студента просторових уявлень, без яких неможливе вивчення просторових фігур.

Як у шкільній практиці, так і у викладанні геометрії у вищих навчальних закладах виникають певні труднощі, пов'язані з виконанням зображень просторових фігур. Проблема зображення тіл та їх використання в навчальному процесі має суттєве й до того ж подвійне значення при викладанні геометрії. З одного боку, зображення геометричних фігур і вивчення їх властивостей забезпечує *наочність* у викладанні геометрії, а також конкретність у практичному використанні. У цьому випадку геометричне зображення відіграє *ілюстративну роль*, тому й називається *ілюстративним*. З іншого боку, зображення фігур можна використовувати як засіб розв'язування задач. Тоді маємо справу з *рисунком розв'язувальним*.

В обох випадках для зображення геометричної фігури користуються методом проектування, тому одержані зображення називаються *проекційним рисунком*.

Залежно від призначення і застосування проекційних рисунків впливають різні вимоги до них. Для ілюстративних рисунків важливе значення має *наочність* і *простота* виконання, тоді як для розв'язувальних рисунків необхідна достатня *повнота* і *точність* відповідного зображення.

У цій частині посібника проаналізовані загальні вимоги до зображення просторових фігур на площині, сутність і властивості центрального і паралельного проектування (частина III, розділ 1).

Окремими розділами виділені «Метод Монжа» (частина III, розділ 2), «Метод аксонометрії» (частина III, розділ 3), «Метод лінійної перспективи» (частина III, розділ 4), «Метод основної площини» (частина III, розділ 5). У кожному з цих розділів розглянуто суть методу та його застосування до зображення просторових фігур, до розв'язування задач.

КУРС ВИЩОЇ ГЕОМЕТРІЇ

У кожній частині посібника викладено короткі історичні відомості стосовно змісту відповідної частини. Можливо, матеріал посібника дещо ширший від того, що можна викласти у відведені навчальним планом години на вивчення геометрії, але надлишковий матеріал може бути використаний студентами при написанні курсових і дипломних робіт.

Викладення теоретичного матеріалу супроводжується прикладами і задачами на застосування теорії, що допоможе читачеві краще її засвоїти. До вправ, винесених на самостійне опрацювання, подані детальні вказівки щодо їх розв'язання.

Посібник написаний на основі багаторічного досвіду авторів у викладанні геометрії в педагогічних університетах.

Частина I

**ОСНОВИ
ГЕОМЕТРІЇ**

Історичний нарис обґрунтування геометрії

§ 1. Предмет основ геометрії

У геометрії весь матеріал викладається у вигляді строгої послідовності чітко сформульованих тверджень – означень і теорем.

Теоремою називається твердження, істинність якого встановлюється за допомогою доведення, тобто міркувань, оснований на законах логіки.

Означення – це твердження, в якому пояснюється зміст того чи іншого поняття.

У курсі геометрії всі теореми розміщуються в певній послідовності. При доведенні n -ї теореми як аргумент використовують $(n - 1)$ раніше доведених тверджень. При доведенні $(n - 1)$ -ї теореми використовуються $(n - 2)$ попередніх тверджень і т.д. Цей процес не є нескінченним. Через скінченну кількість кроків прийдемо до таких тверджень, для обґрунтування яких уже немає початкових тверджень.

Тому для того, щоб можна було проводити доведення теорем, деякі твердження беруться без доведення. Такі твердження називаються *аксіомами*. Тоді, виходячи з аксіом, за допомогою логічних умовиводів переходять від однієї теореми до іншої.

Аналогічна ситуація і з означеннями. Як не можна довести всі без винятку твердження, так не можна й означити всі поняття. Кожне нове поняття означається через інші, введені раніше. У результаті прийдемо до таких понять, які не можна означити, їх приймають без означень і називають *основними поняттями*. Аксіоми і основні поняття не можуть вибиратись незалежно одне від одного. В аксіомах стверджуються властивості основних понять.

Таким чином, аксіоматична будова геометрії здійснюється за такою схемою:

1. Вводяться основні поняття.
2. Дається система аксіом, які визначають основні поняття.
3. За допомогою основних понять означаються нові поняття, а на основі аксіом доводяться нові твердження як теореми.

Перелік основних понять і аксіом, достатніх для строго логічного означення всіх інших понять геометрії і доведення всіх тверджень про ці поняття, називається *обґрунтуванням геометрії*.

При цьому виникають такі запитання:

1. Які поняття вибрати основними, а які означати через основні?
2. Які твердження геометрії взяти за аксіоми?
3. Як треба здійснювати вибір основних понять і аксіом, щоб з них можна було за допомогою логічних міркувань розвинути всю геометричну теорію?

На всі ці запитання дає відповідь наука, яка називається основами геометрії. Отже, *основи геометрії* – це наука, предметом вивчення якої є обґрунтування геометрії.

Питання про обґрунтування геометрії тісно пов'язане з її історією. Тому зупинимось коротко на деяких історичних етапах її розвитку.

§ 2. Геометрія до Евкліда

1. Геометрія на Стародавньому Сході

Геометрія виникла і розвивалась під впливом життєвих потреб людей. Перші відомості з геометрії були здобуті на Стародавньому Сході – в Єгипті, Вавилоні, Китаї, Індії – у зв'язку з розвитком землемірства. Найбільших успіхів у цьому напрямку досягли в Стародавньому Єгипті. Про це свідчать кілька єгипетських папірусів, у яких містяться геометричні відомості. Найбільш важливі з них – папірус Рінда, який зберігається в Британському музеї, та Московський папірус, розшифрований знаменитим російським єгиптологом В.В. Струве.

Як свідчать ці папіруси, єгиптяни знали правила обчислення площі багатокутників, площі круга, уміли обчислювати об'єми ряду многогранників.

Число π обчислювали досить точно: $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,16\dots$

У Московському папірусі наведено правило для обчислення об'єму зрізаної піраміди, яке повністю збігається з сучасною формулою,

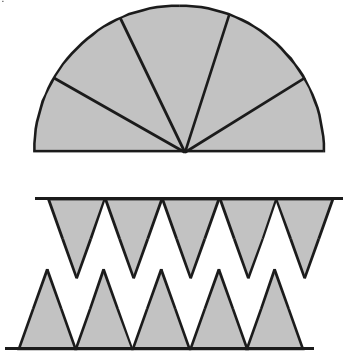


Рис. 1.1

а в одному місці Струве знайшов навіть правило для обчислення площі сфери.

Встановлено, що у Вавилоні досить давно знали теорему Піфагора.

Такі значні досягнення не могли бути одержані чисто емпіричним шляхом. Очевидно, єгипетським жрецям і писарям, у чиїх руках знаходились всі наукові дослідження, були відомі деякі теоретичні геометричні викладки. Але все ж геометрія Стародавнього Сходу носила в основному емпіричний характер і містила зібрання розв'язків окремих задач, правил для знаходження площ, об'ємів тощо. При обґрунтуванні геометричних тверджень звертались до інтуїції або до спостереження, логічних доведень

у нашому розумінні ще не знали. Всі обґрунтування зводились до рисунка, під яким стояв напис: «Дивись». Наприклад, індуський математик Ганеші твердження «площа круга дорівнює добутку половини довжини кола на радіус» обґрунтовує рисунком 1.1.

2. Геометрія у Стародавній Греції

Застій і спад економіки Єгипту загальмували подальший розвиток геометрії в цій країні. Поступово центр математичної культури переміщується в Грецію, де в VII–VI ст. до н.е. бурхливо розвивається мореплавство, міське будівництво, зароджується астрономія і фізика. Елементарні методи безпосереднього спостереження, доведення на основі інтуїції вже не могли розв'язати поставлені перед геометрією складні задачі. Треба було відірвати геометрію від задач вимірювання реальних об'єктів і надати їй теоретичного характеру. Вирішення цього завдання взяла на себе *школа Фалеса*.

Фалес (640–548 рр. до н.е.) – представник Мілетської школи, знаменитий філософ і математик. Школа Фалеса розпочала теоретичні дослідження і ввела в геометрію логічні доведення тверджень. Зокрема, Фалесу приписують доведення властивості кутів при основі рівнобедреного трикутника, властивості вертикальних кутів і знаменитої теореми Фалеса, яка вивчається в основній школі.

У подальшому геометрами Стародавньої Греції були здобуті важливі результати, які охоплюють майже весь зміст сучасної елементарної геометрії.

Так, **Піфагор** (близько 580–500 рр. до н.е.) і його школа відкрили теорему про суму кутів трикутника, довели відому теорему Піфагора, існування п'яти типів правильних многогранників. Од-

ним з найвидатніших досягнень школи Піфагора є відкриття несумірних відрізків, що зумовило першу кризу в математиці. Відомі грекам раціональні числа виявились недостатніми для вираження міри довільних відрізків. Грецькі вчені-математики дійшли висновку, що геометрична неперервна величина є більш загальним поняттям, ніж число; геометрія – більш загальна наука, ніж наука про число: вона повинна розвиватися незалежно від науки про число, бути панівною.

Пізніше **Евдокс** (410–356 рр. до н.е.) створив геометричну теорію пропорцій, яка замінила грекам теорію ірраціональних чисел, яких вони не знали. Теорія Евдокса дала можливість подолати кризу в математиці, пов'язану з відкриттям несумірних відрізків. Метод Евдокса дозволив вимірювати відрізки з будь-якою точністю. Крім того, Евдокс відкрив метод вичерпування: *«Якщо від величини A відняти $1/2 A$ або більше, з остачею проробити те саме і т.д., то можна дістати таку величину, яка менша будь-якої наперед заданої»*. Користуючись цим методом, Евдокс знаходить об'єми піраміди, конуса, кулі.

Учень Евдокса **Менехм** (близько 360 р. до н.е.), розв'язуючи задачу про подвоєння куба, відкрив конічні перерізи – еліпс, гіперболу, параболу, теорію яких потім розробив інший грецький математик – **Аполлоній**.

Архімед (287–212 рр. до н.е.) – великий грецький математик, астроном і філософ, знайшов правила для обчислення площі параболи, об'єму і поверхні кулі, одержав досить точне наближення числа

$$\pi: \pi = \frac{22}{7} = 3,143\dots$$

Таким чином, протягом кількох століть старогрецькими математиками був накопичений величезний запас геометричних знань. Постало завдання їх систематизації і приведення в логічну систему. Заслугою старогрецьких математиків є те, що вони поставили таке завдання і успішно його вирішили. Постановка задачі про логічне обґрунтування геометрії пов'язана з іменем Платона.

Платон (427–347 рр. до н.е.) вважав, що в будь-якій галузі знань необхідно виділяти основні поняття і твердження, з яких всі інші поняття і твердження повинні випливати як логічні наслідки. Але оскільки Платон був ідеалістом, то все його вчення побудоване на напівмістичній основі, а загальний задум логічної будови науки чітко не сформульований.

Навчальне видання

Боровик Василь Наумович
Яковець Василь Павлович

Курс вищої геометрії

Навчальний посібник

Директор видавництва Р.В. Кочубей
Головний редактор В.І. Кочубей
Технічний редактор Н.Ю. Курносова
Дизайн обкладинки і макет В.Б. Гайдабрус
Комп'ютерна верстка О.В. Бердинських, Д.І. Іовенко

ТОВ «ВТД «Університетська книга»
40030, м. Суми, вул. Кірова, 27
Тел.: (0542) 27-51-43
E-mail: publish@book.sumy.ua

Відділ реалізації
Тел./факс: (0542) 21-26-12, 21-11-25
E-mail: info@book.sumy.ua

Підписано до друку 23.09.04.
Формат 70x90 ¹/₁₆. Папір офсетний. Гарнітура Скулбук.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 36,4. Обл.-вид. арк. 34,65.
Тираж 1000 прим. Замовлення № 3742

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції ДК № 489 від 18.06.2001

Надруковано відповідно до якості
наданих діапозитивів у друкарні «Торнадо»
Україна, 61045, м. Харків, вул. Отакара Яроша, 18