Зміст

Розділ 3

ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ

Розділ 4

ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розділ 5

МЕТОД КООРДИНАТ У ПРОСТОРІ

Розділ 6

ПЛОЩИНА І ПРЯМА В ПРОСТОРІ

Розділ 7

ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Передмова

У студентів-першокурсників фізико-математичного факультету педагогічного вузу з перших днів навчання виникає запитання: навіщо вчити з математики (та й інших дисциплін) те, що не викладається в школі? Доводиться роз'яснювати, що педвуз дає вищу освіту, а не середню, і вузівські програми з різних дисциплін, у тому числі й з математики, передбачають такий рівень знань, який дасть можливість майбутньому вчителю відповісти на будь-які запитання, що виникнуть в учнів у процесі вивчення даної дисципліни. Учитель, володіючи більшим обсягом знань, ніж вимагає шкільна програма, зможе вибрати оптимальну методику викладання відповідного матеріалу, збудити інтерес учнів до вивчення математики, складовою частиною якої є геометрія.

Глибока математична підготовка – необхідна умова успішної творчої роботи вчителя в школі. Наприклад, при розв'язуванні задачі про поділ кута на дві рівні частини циркулем і лінійкою в допитливих учнів природно виникає запитання, як поділити кут на три і більше рівних частин циркулем і лінійкою?

Аналогічно при вивченні многокутників і побудові правильних n-кутників при $n = 3, 4, 5, 6$ учнів зацікавить, як побудувати правильний семикутник чи дев'ятикутник? Відповіді на ці й на багато інших подібних запитань ні вчитель, ні учень не знайде в шкільному підручнику з геометрії. Ось тут допоможуть вчителю знання, які він дістав у курсі геометрії педвузу.

При проведенні екскурсії в картинну галерею учні можуть запитати, чому однакові будинки на картині мають різні розміри: ті, що ближче – більші, а ті, які далі – менші; чому вулиці на картині в частині, що ближче до нас, ширші, а ті, що далі, – вужчі, хоча насправді вони мають однакову ширину. Вчитель зможе це пояснити, бо в педвузі вивчав методи зображення просторових об'єктів на площині.

При вивченні фізики та астрономії вчитель також зустрічається з деякими геометричними поняттями, які виходять за межі шкільної програми. Такими поняттями, наприклад, є лінії другого порядку. Скажімо, при вивченні траєкторії руху планет Сонячної системи маємо справу з еліпсами; траєкторією руху снаряда чи ракети, випущених під гострим кутом до горизонту, є парабола; графіком оберненої пропорційності або графіком закону Бойля – Маріотта є гіпербола.

Отже, вчитель повинен досконало знати ці криві, тому їм приділено достатню увагу в курсі аналітичної геометрії. Таких прикладів можна навести багато, усі вони підтверджують, що вчитель математики і фізики повинен мати з цих дисциплін значно більший обсяг знань, ніж того вимагає шкільна програма.

Вивчаючи вищу математику, складовою частиною якої є аналітична геометрія, майбутній вчитель одночасно оволодіває і загальною математичною культурою, розвиває своє математичне мислення, набуває вміння легко і швидко орієнтуватися в різних математичних ситуаціях.

Навчальний посібник написано згідно з діючою програмою з аналітичної геометрії для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів.

Історичні відомості про виникнення і розвиток геометрії, про предмет і метод аналітичної геометрії викладені у вступі.

У першій частині «Аналітична геометрія на площині» розглянуто елементи векторної алгебри (розділ І), які потім використовуються при викладенні основних положень методу координат на площині (розділ 2), при вивченні різних форм рівняння прямої (розділ 3) та рівнянь ліній другого порядку (розділ 4).

Друга частина посібника присвячена питанням аналітичної геометрії в тривимірному просторі. У ній, зокрема, розширено відомості з векторної алгебри в просторі (векторний і мішаний добутки векторів – розділ 5), рівняння площини і прямої в просторі (розділ 6), поверхні другого порядку (розділ 7).

Одне з найважливіших завдань курсу аналітичної геометрії полягає в тому, щоб навчити майбутнього вчителя вмінню застосовувати аналітичний метод до розв'язування задач з геометрії, у тому числі й задач шкільної математики. Тому в посібнику приділена значна увага розв'язанню задач координатним методом.

Посібник написано на основі багаторічного досвіду викладання авторами курсу аналітичної геометрії в Ніжинському та Чернігівському педуніверситетах.

Автори виловлюють щиру вдячність рецензентам, поради яких сприяли поліпшенню посібника.

Автори

Покажчик вживаних символів

A, B, C, D ... – точки.
a, b, c, d ... – прямі.
α, β, γ ... – площини.
AB – пряма з довільними точками A і B на ній.
$[AB]$ – відрізок, A і B – його кінці.
$[AB)$ – промінь, A – початок, B – довільна точка променя.
$\overline{AB}$ – напрямлений відрізок, $\left|\overline{AB}\right|$ – його довжина.
$\overrightarrow{AB}, \vec{a}$ – вектор.
$\uparrow\uparrow$ – однаково напрямлені (співнапрямлені) відрізки, вектори.
$\uparrow\downarrow$ – протилежно напрямлені відрізки, вектори.
$\left|\overrightarrow{AB}\right|, \left|\vec{a}\right|$ – довжина (модуль) вектора.
$\overrightarrow{AA}, \vec{0}$ – нульовий вектор.
$\parallel$ – паралельність прямих, колінеарність векторів.
$\perp$ – перпендикулярність прямих, векторів.
(ABC) – площина, визначена точками A, B, C.
$\angle O$ – кут з вершиною в точці O.
$\angle ABC$ – кут з вершиною B і точками A і C на його сторонах.
$\angle(ab)$ – кут зі сторонами a і b.
$\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.
$\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ – орієнтований кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.
$\cup AB$ – дуга кола, A і B – її кінцеві точки.
$(O, R), K(O, R)$, – коло з центром O і радіусом R.
$K_p(O, R)$ – круг з центром O і радіусом R.
$\vec{a}\vec{b}$ – скалярний добуток векторів.
$[\vec{a}\vec{b}]$ – векторний добуток векторів.

$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = [\vec{a}\vec{b}]\vec{c}$ – мішаний (векторно-скалярний) добуток векторів.

V_3, V_2, V_1 – простори тривимірний, двовимірний, одновимірний відповідно.

$(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ – базис просторів V_3, V_2.

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – ортонормований базис простору V_3.

$O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$, $O\vec{e_1}\vec{e_2}$ – афінна система координат у просторі, на площині.

$OXYZ$, OXY – система координат у просторі, на площині.

OX, OY, OZ – відповідно осі абсцис, ординат, аплікат.

$O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, $O\vec{i}\vec{j}$ – прямокутна система координат з початком O у просторі, на площині.

$\overrightarrow{AB}(x; y; z)$, $\vec{a}(x; y; z)$ – вектори з координатами x, y, z.

$A(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})$ – базис A у просторі V_3.

$\Rightarrow$ – слідує, випливає.

$\Leftrightarrow$ – рівносильна, еквівалентна.

$\to$ – відображається.

$\forall$ – квантор загальності (кожний, всякий).

$\exists$ – квантор існування (існує).

$\forall x \in F$ – кожний x належить фігурі F (множині F).

$\exists x \in F$ – існує x, який належить фігурі F (множині F).

$\det A$ – детермінант (визначник) матриці A.

A/B – визначник матриці переходу від базису A до базису B.

Вступ

1. Історичні відомості про виникнення і розвиток геометрії

Виникнення геометрії пов’язують з практичними потребами людини, зокрема з необхідністю вимірювати земельні ділянки у долинах річок, які щорічно розливались і змивали межі земельних наділів (у перекладі з грецької слово «геометрія» означає «землемірство»).

У розвитку геометрії можна виділити кілька періодів. *Перший період* (до VII ст. до н.е.) – це період накопичення окремих геометричних правил, прийомів без будь-якого обґрунтування, так званий *рецептурний* період. Це період зародження математики та будівництва грандіозних пірамід-усипальниць фараонів. Задачі з астрономії також вимагали різних обчислень, пов’язаних з геометричними фігурами.

У Стародавньому Єгипті, Вавілонії, Китаї, Індії були відомі окремі правила вимірювання довжин, площ, об’ємів фігур. Із Стародавнього Єгипту до наших часів дійшов твір, написаний приблизно 2000 років до н.е., – папірус Ахмеса, в якому подано зразки розв’язання задач про знаходження площ прямокутника, трикутника, трапеції.

Наприкінці першого періоду початкові геометричні відомості з Єгипту, Індії, Вавілону переносяться в Стародавню Грецію (біля VII ст. до н.е.).

Другий період (VII ст. до н.е. – XVII ст. н.е.) – це період становлення математики як науки, період математики сталих величин. З розвитком суспільства з’являлись все нові практичні задачі про взаємозв’язок між навколишніми тілами, розв’язання яких сприяло появі нових геометричних правил і фактів. Їх ставало все більше, і на певному етапі постала необхідність систематизації відомих фактів та встановлення взаємозв’язків між ними.

У зв’язку із загальним розвитком економіки, науки, мистецтва і суспільного життя в Стародавній Греції геометрія теж дістала значний поштовх у своєму розвитку. Завдяки грецьким вченим геометрія за три століття з вузькоприкладної перетворилася в строгу теоретичну науку.

Уже в V ст. до н.е. Гіппократ Хіоський і Демокріт, а в IV ст. до н.е. Леон і Февдій Магнезійський робили спроби систематично викласти геометрію, але їхні твори не збереглися.

У IV ст. до н.е. Арістотель (384–322 до н.е.) виклав основні закони логіки, за якими слід міркувати так, щоб з правильних посилань дістати правильні висновки. Арістотель заклав основи дедуктивного викладу матеріалу певної науки, за якими спочатку треба дати означення об'єктів науки, сформулювати вихідні положення (аксіоми і постулати), а потім – усі твердження доводити за законами логіки.

Завдання систематизації геометричних фактів, створення геометрії як науки розв'язав *Евклід* у своїх «Початках», написаних близько 300 р. до н.е. «Початки» Евкліда складаються з 13 книг, з них 1–4 і 6-та присвячені планіметрії, 5, 7–9-та – арифметиці, 10-та – несумірним величинам, 11–13-та – стереометрії. У цьому творі Евклід виклав матеріал тільки елементарної геометрії, хоча на той час уже були значні відомості про конічні перерізи, про деякі криві третього і четвертого порядків. Це справді були початки геометрії (і арифметики), побудовані за дедуктивною схемою Арістотеля.

У першій книзі «Початків» дано визначення ряду геометричних об'єктів, потім сформульовано аксіоми і постулати, на основі яких доведено геометричні твердження за законами логіки.

Звичайно, не всі твердження «Початків» Евклід сам сформулював і довів. «Початки» містили все те з елементів геометрії, що було створено до Евкліда, а Евклід привів цей матеріал у строгу систему, логічну послідовність, коли кожне наступне твердження доводиться на основі попередніх. При цьому деякі доведення йому довелось переробляти, а часто – й знаходити нові.

Слід зазначити, що «Початки» Евкліда витримали більше 600 видань. Цей твір є основою для написання шкільних підручників з геометрії й до нашого часу.

Після Евкліда грецькі вчені продовжили розвиток геометрії. Так, Архімед вдосконалив методи знаходження площ і об'ємів; Аполлоній дослідив конічні перерізи; Гіппарх виклав основи тригонометрії, а Менелай – основи сферичної геометрії. Протягом двадцяти століть другого періоду геометрія Евкліда збагачувалась новими фактами, але основні принципи її побудови залишались незмінними.

Третій період (XVII–XIX ст.) – це період математики *змінних величин*. Початок цього періоду в розвитку геометрії пов'язаний із введенням у геометрію в 1637 р. *методу координат* і змінної величини французьким вченим і філософом *Р. Декартом* (1596–1650).

У цей період геометрія швидко розвивається, розгалужується: з'явилась *аналітична геометрія* Р. Декарта, *нарисна геометрія* Г. Монжа, *диференціальна геометрія* К. Гаусса, *проективна геометрія* (Б. Паскаль, Ж. Дезарг, Я. Штейнер).

Четвертий період почався з відкриття М.І. Лобачевським (1792–1856) нової *неевклідової геометрії*. Це відкриття стало результатом розв'язання проблеми п'ятого постулату Евкліда (аксіоми паралельних), яка виникла з часів Евкліда. Суть цієї проблеми полягає в тому, що багато вчених намагалися довести п'ятий постулат як теорему, користуючись іншими постулатами «Початків» Евкліда. Спроби довести п'ятий постулат безрезультатно тривали аж до середини XIX ст. Цю проблему розв'язав М.І. Лобачевський, показавши, що п'ятий постулат Евкліда довести на основі інших постулатів «Початків» не можна, що він не залежить від інших постулатів і аксіом, сформульованих у «Початках» Евкліда.

Прийнявши за аксіому твердження, яке суперечило аксіомі паралельності Евкліда, М.І. Лобачевський виявив існування нової неевклідової геометрії, у якій через точку, взяту поза прямою, на площині можна провести не менше двох прямих, що не перетинають даної прямої. Цю геометрію назвали *геометрією Лобачевського*. У ній всі твердження, які не є наслідками п'ятого постулату, залишаються без зміни, а всі наслідки аксіоми паралельності Евкліда набули іншого змісту.

Пізніше, у середині XIX ст., з'явилась інша неевклідова геометрія *Б. Рімана* (1826–1866), в якій паралельних прямих не існує. Більше того, виходячи з теорії кривих поверхонь, Ріман встановив існування безлічі геометрій, які описують властивості просторів різної кривини.

Наприкінці XIX ст. з геометрії виділилась ще одна геометрична наука – *топологія*, творцем якої вважають французького математика *А. Пуанкаре* (1854–1912). Значний вклад у розвиток топології внесли *П.С. Александров* (1896–1982), *О.Д. Александров* (нар. 1912 р.), *О.В. Погорєлов* (нар. 1919 р.). Топологія вивчає найбільш загальні властивості простору, пов'язані з поняттям неперервності.

Якщо геометрія виникла з практичних потреб вимірювання, то в топології вимірювання величини не відіграє ніякої ролі. Так геометрія в процесі свого розвитку перетворилась з геометрії кількісної в науку якісну.

2. Предмет і метод аналітичної геометрії

Геометрія – це наука про форму, розміри і взаємне розміщення геометричних фігур. Під фігурою в геометрії розуміють будь-яку множину точок: це може бути окрема точка, сукупність кількох точок, відрізок, промінь, пряма, кут, коло, многокутник, циліндр тощо.

У геометрії властивості фігур вивчають вимірюваннями і обчисленнями або побудовами. При цьому зручно виражати властивості фігур однотипними формулами, за якими потім проводити обчислення в кожному окремому випадку. Побудови менш уніфіковані, вони потребують винахідливості, певних затрат часу.

Пошуки загального методу виведення формул, які б відбивали властивості фігур і застосовувались до розв'язання задач, привели до створення нової галузі – *аналітичної геометрії*.

Виникнення в першій половині XVII ст. аналітичної геометрії, яка встановила зв'язок між алгеброю і геометрією, не було випадковим. Воно було підготовлено як ходом розвитку математики, так і вимогами виробництва того часу.

Після значних досягнень у розвитку геометрії в Стародавній Греції настав тривалий період застою в усіх галузях науки. Для подальшого розвитку математики, у тому числі й геометрії, необхідно було розширення поняття числа, впровадження ідей змінних величин і руху.

Після великих географічних відкриттів (Америки – в 1492 р., морського шляху в Індію – в 1498 р.) активізувався розвиток виробництва, торгівлі, мореплавства, які потребували удосконалення складання географічних карт, тригонометричних і астрономічних таблиць, розробки більш раціональних методів обчислення. Тому почали розвиватися наука і техніка (дослідження Галілея в механіці, Коперника і Кеплера в астрономії), що стимулювало розвиток і математики.

Це і зумовило в середині XVII ст. створення *аналітичної геометрії*, а потім диференціального та інтегрального числення.

Предметом аналітичної геометрії є вивчення геометричних фігур (об'єктів) засобами алгебраїчного аналізу, а її *методом* є метод координат[1] , за допомогою якого реалізується застосування алгебраїчної теорії в геометрії до вивчення найпростіших фігур.

В аналітичній геометрії провідна роль належить обчисленням, оперуванню формулами, а побудови відіграють допоміжну, ілюстративну роль.

---

[1] Термін «координата» походить від лат. *ordinatus* – «упорядкований» і префікса *co* – «спільно, сумісно».

Зачатки координатного методу були вже у Вавілоні, він був пов'язаний з проблемами географії і астрономії.

У II ст. до н.е. грецький вчений Гіппарх (180–125 до н.е.) запропонував визначати положення точки на земній поверхні географічними координатами (довгота і широта). Математик александрійської школи Аполлоній (262–190 до н.е.) написав трактат «Конічні перерізи», в якому фактично використовував прямокутні координати. За їх допомогою він визначав добре відомі на той час лінії другого порядку – еліпс, гіперболу, параболу.

Основоположником координатного методу, а разом з цим і аналітичної геометрії вважають великого французького математика і філософа Рене Декарта (1596–1650), який виклав основи цього методу у своїй «Геометрії», опублікованій у 1637 р., як частині його філософського твору «Міркування про метод».

Одночасно і незалежно від Декарта метод координат було розроблено іншим видатним французьким математиком П'єром Ферма (1601–1655), твори якого були опубліковані пізніше (у 1679 р.).

Суть методу координат полягає в тому, що кожній точці на прямій, на площині, в просторі за певним правилом ставляться у відповідність певні числа – її координати, що надає змогу за допомогою чисел засобами алгебри описувати положення точок і досліджувати властивості фігур, з яких вони складаються (прямих і кривих ліній, площин, поверхонь тощо).

Декарту належить також ідея зіставлення алгебраїчного рівняння з двома невідомими і лінії на площині: у рівнянні $F(x; y) = 0$ він запропонував змінну x вважати абсцисою точки, а значення y, що відповідає йому, – її ординатою. Тоді, безперервно змінюючи значення x і знаходячи відповідні йому значення y, матимемо множину точок площини, координати x і y яких задовольняють рівняння $F(x; y) = 0$. Ця множина точок і є якась лінія на площині. Отже, рівнянню з двома змінними $F(x; y) = 0$ відповідає у вибраній системі координат цілком визначена лінія на площині. І, навпаки, лінію на площині як множину точок, визначену певною геометричною умовою, можна задати рівнянням, яке виражає аналітично цю саму умову за допомогою координат її точок.

«Геометрія» Декарта ще не була справжньою аналітичною геометрією. Декарт в ній розглядав, по суті, тільки одну пряму з фіксованою точкою відліку на ній і вивчав властивості кривих ліній відносно цієї прямої. Однак це було вже великим кроком уперед. Ідея вимірювання абсциси на деякій фіксованій прямій і визначення положення точки на прямій здається нам тепер досить простою, але ніхто до Декарта і Ферма до цього не додумався.

«Геометрія» Декарта в основному є алгебраїчною працею, але в ній чітко виражена ідея аналітичної геометрії – алгебраїчний спосіб дослідження геометричних об'єктів за допомогою методу координат. Значна частина «Геометрії» присвячена методам алгебраїчного і графічного розв'язування рівнянь.

Ідеї Декарта, викладені в його «Геометрії», доповнювали у своїх творах француз Ф. Дебон, голландець Скоотен, англійці Дж. Валліс та І. Ньютон. Але тільки Г. Крамер у своєму творі «Вступ в аналіз алгебраїчних кривих» (1750) уперше ввів вісь ординат, вважаючи її рівноправною з віссю абсцис, і використовував поняття двох координат точки на площині. У праці «Вступ в аналіз» (1748) Л. Ейлера вперше в сучасному розумінні викладена аналітична геометрія конічних перерізів.

Походження назви «аналітична геометрія» пов'язують з тим, що відомий французький математик Франсуа Вієт (1540–1603) свою буквенну алгебру назвав «аналітичним мистецтвом», після чого будь-яке застосування алгебри в геометрії стали називати «аналітичним». Цей термін не належить ні Ферма, ні Декарту. Термін «аналітична геометрія» введено французьким математиком С. Лакруа в четвертому виданні його книги «Курс математики» (1807), а першою книгою під назвою «Аналітична геометрія» був підручник Г. Гарньє, виданий у Парижі в 1808 р.

Отже, подальший розвиток ідей Декарта привів до створення аналітичної геометрії як математичної науки, у якій геометричні об'єкти досліджуються засобами алгебри на основі координатного методу.

У Декарта і Ферма були лише деякі припущення про можливість поширення методу координат з двовимірного простору на тривимірний.

В одному з листів до Лейбніца в 1715 р. Іоганн Бернуллі визначив просторові координати x, y, z як перпендикуляри на три взаємно перпендикулярні площини. Перший, хто систематично і широко використовував метод координат у просторі, був французький математик А.К. Клеро (1713–1765). У своєму творі «Дослідження ліній двоякої кривини» (1731) він вводить третю координату z і для ілюстрації ідеї про те, що одне рівняння з трьома змінними зображає деяку поверхню, наводить такі рівняння:

1) $xx + yy + zz = aa$;

2) $yy + zz = ax$;

3) $\sqrt{yy+zz}=\frac{n}{m}x.$

Він також уперше вивів рівняння площини.

Систематичний виклад аналітичної геометрії в просторі вперше дав Л. Ейлер у другому томі «Вступу в аналіз» (1748), який по праву вважається першим курсом аналітичної геометрії в сучасному розумінні. Ця книга складається з двох частин, перша з яких присвячена аналітичній геометрії на площині, а друга – у просторі.

Друга частина складається з шести глав, у ній вперше подано систематичний виклад аналітичної геометрії в просторі. У першій главі вводиться система декартових координат у просторі, розглядаються вісім октантів, утворених трьома координатними площинами, знаходиться відстань точки простору від початку координат. У другій главі виводиться рівняння циліндричних і конічних поверхонь. Третя глава містить теорію плоских перерізів кругового циліндра і конуса, у четвертій – виведені формули перетворення координат у просторі з використанням відомих «кутів Ейлера». У п'ятій главі проведено дослідження загального рівняння другого порядку з трьома змінними, подана класифікація квадрик, виведено рівняння еліпсоїда, однопорожнинного і двопорожнинного гіперболоїдів, параболоїдів. Шоста глава присвячена просторовим кривим.

Ця праця Ейлера виділяється доступністю викладу матеріалу, що сприяло її популярності.

Французький математик Лагранж (1736–1813) у творі «Аналітична механіка» (1788) показав застосування методу координат у фізиці. Подальшим розвитком цих ідей Лагранжа було створення векторного числення, алгебраїчна частина якого (так звана векторна алгебра) стала істотною частиною аналітичної геометрії.

На відміну від курсів аналітичної геометрії XVIII–XIX ст. у сучасних підручниках аналітичної геометрії використовується теорія визначників і матриць, а поряд з координатним викладом матеріалу застосовується й векторний.

З'явившись у геометрії, метод координат у дещо зміненому вигляді знайшов застосування і в інших науках: географії, картографії, геодезії, у шаховій грі тощо.

Метод координат відкрив шлях у математику змінним величинам.

Аналітична геометрія мала великий вплив на розвиток диференціальної і проективної геометрій, аналітичної механіки і багатьох інших розділів математики і фізики.

На основі двовимірної та тривимірної була створена багатовимірна аналітична геометрія.

Елементи аналітичної геометрії входять у шкільні підручники з математики.

Розділ **1**

Елементи векторної алгебри

§ 1. Скалярні і векторні величини

Величини відображають різноманітні властивості реальних об'єктів навколишнього світу. У математиці поняття величини виникло в результаті абстрагування від якісних особливостей цих об'єктів, щоб виділити тільки кількісні відношення.

Поняття величини тісно пов'язане з поняттям вимірювання. Результат вимірювання виражається числовим значенням величини при певній одиниці вимірювання – ***мірою величини***.

Поняття величини відіграє фундаментальну роль не лише в математиці, а й у фізиці та інших науках. Предметом фізичного дослідження є фізичні об'єкти, явища, які мають багато властивостей. Для кількісного опису цих властивостей використовують різні величини.

Усю сукупність величин за певними характерними властивостями поділяють на скалярні, векторні, тензорні, неархімедові та ін. Ми будемо розглядати лише скалярні та векторні величини.

Скалярними величинами називаються величини, які при вибраній одиниці виміру характеризуються лише числом. Це, наприклад, довжина відрізка, площа фігури, об'єм тіла, маса, густина, температура, опір провідника та ін.

Термін «скалярні» походить від латинського слова *scala* – «східці», «шкала», яку дістають при зображенні чисел на координатній осі.

Векторними величинами називають такі величини, для характеристики яких, крім числового значення, необхідно вказувати ще й напрям дії. Такими величинами є, зокрема, фізичні величини: швидкість, прискорення, момент сили, напруга електричного поля тощо.

Геометрично векторні величини зображують напрямленими відрізками, які називають ***векторами***.

Поняття вектора є одним із фундаментальних понять сучасної математики. Його можна визначити по-різному: як напрямлений відрізок, як упорядковану пару точок, що є кінцями напрямленого відрізка, як упорядковану пару чисел, як паралельне перенесення, як множину однаково напрямлених відрізків однакової довжини.

Уперше поняття вектора як напрямленого відрізка знайшло застосування в механіці для зображення фізичних векторних величин: швидкості, прискорення, сили, моменту сили тощо. Високий ступінь наочності і простота геометричних операцій над векторами як напрямленими відрізками сприяли тому, що поняття вектора знайшло загальне визнання і застосування в інших розділах фізики: у кінематиці, статиці, динаміці точки і динаміці системи, у теорії потенціалу та гідродинаміці.

Проте хоча поняття вектора знайшло перше застосування в фізиці, це математичне поняття, усі операції над яким виконуються за законами математики.

Подальше, більш глибоке застосування вектора було пов'язане з його більш детальним вивченням, обґрунтуванням і застосуванням в математиці.

Праці К. Весселя (1745–1818), Аргана (1768–1822), К. Гаусса (1777–1855) з теорії комплексних чисел встановили зв'язок між операціями над комплексними числами і геометричними операціями над векторами на площині.

Застосуванню векторів у тривимірному і багатовимірному просторах присвячено праці відомих математиків В. Гамільтона (1805–1865), Мебіуса (1790–1868), Г. Грассмана (1809–1877).

Термін «вектор» (від лат. слова *vector* – «тягти») введено Гамільтоном у 1846 р.

Кінець XIX ст. і початок XX ст. є подальшим широким розвитком векторного числення і його застосування. Створені векторна алгебра, векторний аналіз, теорія поля, тензорний аналіз. На векторній основі викладено лінійну алгебру, аналітичну і диференціальну геометрії.

Вектор як математичне поняття міцно ввійшов у шкільну математику, у різні нематематичні науки.