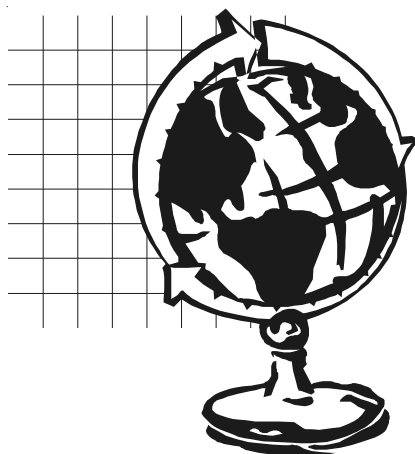


**Л.В. Тарасов**

# **ГЕОМЕТРИЯ окружающего мира**



УДК 514.112(075-3)  
ББК 22.151.Оя721  
Т19

Рекомендовано к печати ученым советом Сумского областного института последипломного педагогического образования. Протокол № 4 от 26.05.2005

Автор:

Тарасов Лев Васильевич – профессор, автор новой модели образования «Экология и развитие»

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук, профессор Ф.М. Лиман;  
доктор пед. наук, профессор А.Г. Мордкович

**Тарасов Л.В.**

**Т19** Геометрия окружающего мира. – Сумы: ИТД «Университетская книга», 2008. – 364 с.

ISBN 978-966-680-419-1

Экспериментальная учебная книга «Геометрия окружающего мира» является обстоятельным вводным наглядно-практическим курсом, предназначенным для изучения в 5-6-х классах общеобразовательной средней школы (в частности, школы «Экология и развитие»); она обеспечивает серьезную подготовку учащихся к последующему более углубленному изучению базового курса геометрии. Может использоваться также в качестве курса геометрии в 7–10 классах в школах с гуманитарным профилем и в специализированных учебных заведениях. Возможно использование данной книги для самообразования.

Автор преследовал цель через геометрию раскрыть новые грани окружающего мира, а через окружающий мир углубить интерес к изучению геометрии. Используя на многих страницах форму беседы учителя с учащимися, автор стремился подготовить читателя к неформальному восприятию широкого круга геометрических понятий и представлений. Книга способствует формированию геометрической культуры учащихся и выработке практических навыков выполнения построений, доказательств, геометрических вычислений. Книга выполняет также функции задачника – она содержит 645 заданий для учащихся.

ББК 22.151.Оя721

ISBN 978-966-680-419-1

© Тарасов Л.В., 2002

© ООО «ИТД «Университетская книга», 2008

# Содержание

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Глава 1. Углы на плоскости</b> .....   | <b>7</b>  |
| 1.1. Что такое угол? Как рождаются углы и зачем они? .....  | 9         |
| 1.2. Какие бывают углы? .....   | 13        |
| 1.3. Работаем с циркулем и линейкой .....   | 19        |
| 1.4. Знакомимся с одним из признаков равенства треугольников .....  | 26        |
| 1.5. Биссектриса угла .....   | 29        |
| 1.6. Восстанавливаем перпендикуляр, опускаем перпендикуляр .....  | 31        |
| 1.7. Можно ли умножить угол на дробь? .....   | 34        |
| 1.8. Градусы, которые не греют, и минуты, которые не спешат .....   | 35        |
| 1.9. Работаем с транспортиром .....   | 41        |
| 1.9.1. Измеряем угол транспортиром .....  | 42        |
| 1.9.2. Строим угол с помощью транспортира .....   | 44        |
| 1.10. Расстояния линейные и угловые .....   | 44        |
| 1.11. Углы и проценты, или Знакомство с круговыми диаграммами .....   | 52        |
| <b>Глава 2. Треугольники</b> .....  | <b>57</b> |
| 2.1. Треугольник – многоугольник с наименьшим числом углов и сторон .....   | 58        |
| 2.2. Биссектриса, высота, медиана .....   | 60        |
| 2.3. Равные отрезки, равные углы, равные треугольники .....   | 61        |
| 2.4. Признаки равенства треугольников .....   | 64        |
| 2.5. Теоремы о равнобедренном треугольнике .....  | 69        |
| 2.6. Доказательства в равнобедренном треугольнике .....   | 73        |
| 2.7. Как построить треугольник .....  | 74        |
| 2.7.1. Построение треугольников с помощью циркуля и линейки .....   | 74        |
| 2.7.2. Построение треугольников с помощью измерительной линейки, транспортира, чертежного треугольника и циркуля .... | 78        |
| <b>Глава 3. Треугольники и четырехугольники.</b>  |           |
| <b>Параллельные прямые</b> .....  | <b>79</b> |
| 3.1. Аксиома о перпендикуляре к прямой и параллельные прямые .....  | 82        |
| 3.2. Средние линии треугольника .....   | 87        |
| 3.3. Сумма углов треугольника .....   | 90        |
| 3.4. Прямоугольник – четырёхугольник, у которого все углы прямые .....  | 95        |

|  |     |
|--|-----|
| 3.5. Параллелограмм – четырёхугольник, у которого параллельны противоположные стороны .....                                    | 101 |
| 3.6. Новые построения с помощью циркуля и линейки .....  | 105 |
| 3.6.1. Деление отрезка пополам .....   | 105 |
| 3.6.2. Построение прямой, которая параллельна заданной прямой и проходит через заданную точку .....                            | 106 |
| 3.6.3. Теорема Фалеса Милетского и деление отрезка на любое число равных частей .....  | 108 |
| 3.7. Подобные треугольники .....   | 110 |
| 3.8. Этот удивительный параллелограмм .....  | 118 |
| 3.9. Трапеция – четырёхугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны ..... | 122 |
| 3.10. Построение параллелограмма, ромба, трапеции с помощью циркуля и линейки .....  | 126 |
| 3.11. Площадь треугольников и четырёхугольников .....  | 129 |
| 3.12. Теорема Пифагора Самосского .....  | 134 |

**Глава 4. Треугольники, четырехугольники, круги .....** 137

|   |     |
|---|-----|
| 4.1. А теперь займёмся кругами и окружностями... ..                       | 138 |
| 4.2. Хорда и диаметр .....  | 140 |
| 4.3. Окружность и прямая (пересечение и касание) .....                    | 142 |
| 4.4. Две окружности и прямая (пересечение и касание) .....                | 144 |
| 4.5. Центральные, вписанные и описанные углы .....                        | 147 |
| 4.6. Треугольники и окружности .....                                      | 153 |
| 4.7. Четырёхугольники и окружности .....                                  | 156 |
| 4.8. Окружности и правильные многоугольники .....                         | 159 |
| 4.9. Длина окружности. Число $\pi$ .....                                  | 164 |
| 4.10. Площадь круга .....   | 171 |
| 4.11. Небольшое отступление, касающееся «квадратов» и «кубов» чисел ..... | 173 |

**Глава 5. Плоские углы в пространстве .....** 177

|   |     |
|---|-----|
| 5.1. Смотрим вокруг себя и представляем мысленно точки, прямые, углы, плоскости углов ..... | 179 |
| 5.2. Перпендикуляр к заданной плоскости .....   | 182 |
| 5.3. Угол между двумя пересекающимися плоскостями – это тоже плоский угол .....             | 184 |
| 5.4. Взаимно перпендикулярные плоскости .....   | 185 |
| 5.5. Угол между плоскостью и прямой – это тоже плоский угол .....                           | 187 |
| 5.6. Тренируемся: выявляем плоские углы в пространстве .....                                | 188 |
| 5.7. А если три или больше плоскостей имеют общую точку? .....                              | 192 |
| 5.8. Портрет куба, состоящий из прямых линий, плоскостей, плоских углов .....               | 195 |

**Глава 6. Призмы и пирамиды .....** 197

|  |     |
|--|-----|
| 6.1. Полезные сведения о плоскостях и прямых ..... | 199 |
|--|-----|

|  |     |
|--|-----|
| 6.2. Призмы .....                        | 204 |
| 6.3. Параллелепипеды .....               | 209 |
| 6.3. Параллелепипеды в природе .....     | 217 |
| 6.5. Многогранные (n-гранные) углы ..... | 226 |
| 6.6. Пирамиды .....                      | 231 |
| 6.7. Правильные пирамиды .....           | 235 |

|   |            |
|---|------------|
| <b>Глава 7. Цилиндры и конусы. Цилиндрические и конические поверхности вращения .....</b> | <b>241</b> |
| 7.1. Беседа о том, что такое точка, линия, поверхность, пространство .....                | 242        |
| 7.2. Поверхность вращения. Цилиндрическая и коническая поверхность вращения .....         | 248        |
| 7.3. Прямые круговые цилиндры .....   | 250        |
| 7.4. Прямые круговые конусы .....   | 257        |
| 7.5. Цилиндры и конусы как тела вращения .....  | 264        |
| 7.6. Союз цилиндра и конуса .....   | 270        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>Глава 8. Цилиндры, конусы, шары. Сферические поверхности .....</b> | <b>275</b> |
| 8.1. Сферическая (шаровая) поверхность. Шары .....                    | 276        |
| 8.2. Площадь поверхности шара. Объём шара .....                       | 285        |
| 8.3. Шары, конусы, цилиндры .....                                     | 289        |
| 8.4. Уникальные свойства сферы .....                                  | 293        |
| 8.5. О прочности сферических оболочек .....                           | 297        |
| 8.6. Сфера и световые лучи .....                                      | 301        |

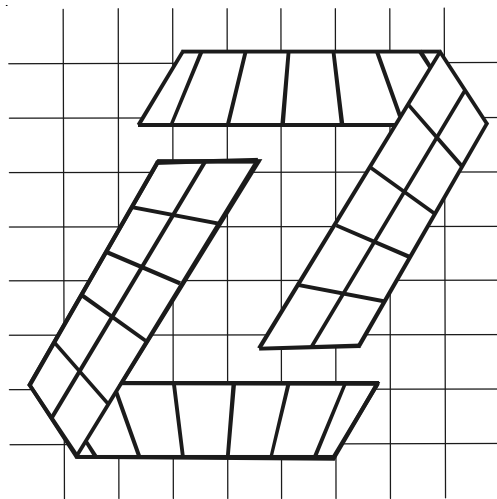
|   |            |
|---|------------|
| <b>Глава 9. Земной шар и глобус .....</b>                       | <b>309</b> |
| 9.1. Как велик наш земной шар? .....                            | 310        |
| 9.2. Градусы на поверхности глобуса .....                       | 313        |
| 9.3. Самый короткий путь из одной точки в другую на сфере ..... | 321        |
| 9.4. Где на земном шаре тени исчезают в полдень? .....          | 325        |
| 9.5. Можно ли вернуться во вчерашний день? .....                | 331        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>Глава 10. Такие разные линии, поверхности, тела .....</b> | <b>337</b> |
| 10.1. Тор .....  | 338        |
| 10.2. Конические сечения .....                               | 341        |
| 10.2.1. Эллипс .....   | 342        |
| 10.2.2. Гипербола .....                                      | 346        |
| 10.2.3. Парабола .....                                       | 350        |
| 10.3. Эллипсоиды, параболоиды, гиперболоиды .....            | 352        |
| 10.4. Разнообразие поверхностей и тел вращения .....         | 356        |

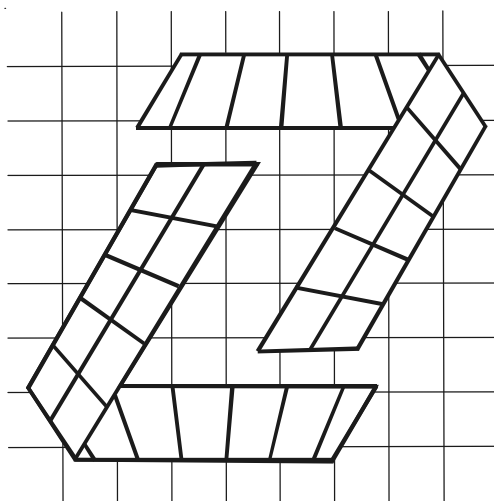
|                        |     |
|------------------------|-----|
| Ответы к задачам ..... | 358 |
|------------------------|-----|



# Глава 1:



# УГЛЫ НА ПЛОСКОСТИ



**Учитель:** Начиная изучать геометрию окружающего мира, мы прежде всего познакомимся с миром углов на плоскости.

**Ученик:** На какой плоскости?

**Учитель:** Вот, например, лежит на столе лист бумаги. Это плоскость или, правильнее сказать, кусочек плоскости. Мы изображаем углы на листе – значит, мы рассматриваем мир углов на плоскости.

**Ученица:** Но мы живем в пространстве. Мы и все предметы вокруг нас не плоские, а объёмные! Следовало бы знакомиться с миром углов в пространстве.

**Учитель:** Всему своё время. Сначала познакомимся с углами на плоскости. Позднее рассмотрим плоские углы в пространстве.

**Ученик:** Вообще-то мы с углами уже немного знакомы.

**Учитель:** Теперь познакомимся с ними более обстоятельно.



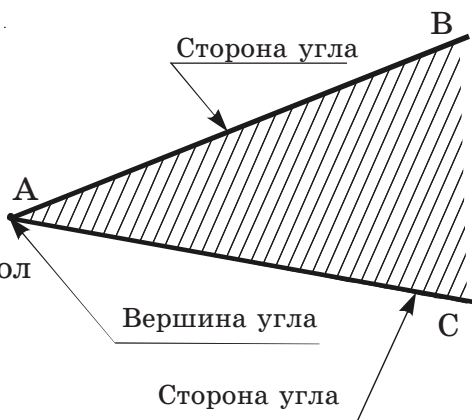
## 1.1. Что такое угол? Как рождаются углы и зачем они?

Чтобы изобразить на плоскости угол, надо из одной и той же точки провести два луча. Эту точку называют *вершиной* угла, а два луча – *сторонами* угла.

Угол – это геометрическая фигура, образованная двумя лучами, выходящими из одной точки.

Посмотри на чертёж: здесь угол заштрихован. Это угол  $BAC$  (пишут так:  $\angle BAC$ ).

Здесь  $A$  – вершина угла,  $AB$  и  $AC$  – стороны угла.



**Ученик:** Я вот посмотрел на чертёж и понял, что угол – *часть плоскости*, ограниченная двумя лучами, выходящими из одной точки. Эта часть плоскости как раз и заштрихована на чертеже!

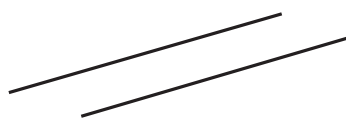
**Ученица:** Но на чертеже заштрихована некоторая *площадь*! Разве у угла есть площадь?

**Ученик:** Конечно, нет! У угла нет никакой площади!

**Ученица:** Тогда, наверное, я чего-то не понимаю...

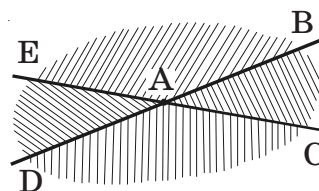
**Учитель:** Здесь уместно обсудить, как рождаются углы и зачем они нам. Проведём на плоскости две прямые линии. Возможны два случая.

**Первый случай:** прямые не пересекаются друг с другом. Такие прямые называют *параллельными*.



Первый случай:  
параллельные прямые

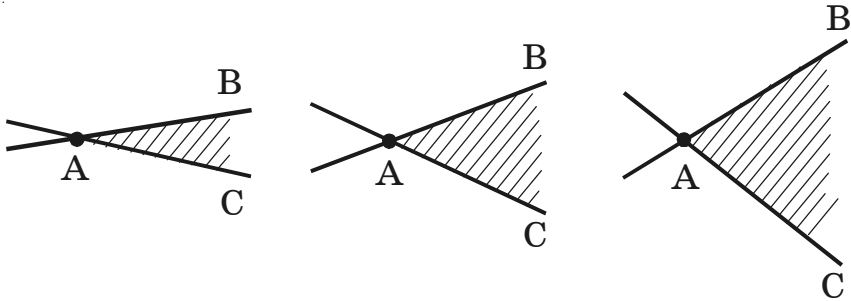
**Второй случай:** прямые пересекаются друг с другом. Это *пересекающиеся* прямые. При пересечении прямых как раз и рождаются углы! Посмотрите на чертёж: в результате пересечения прямых  $DB$  и  $EC$  родились несколько углов:  $\angle EAB$ ,  $\angle BAC$ ,  $\angle DAC$ ,  $\angle EAD$ .



Второй случай:  
пересекающиеся прямые

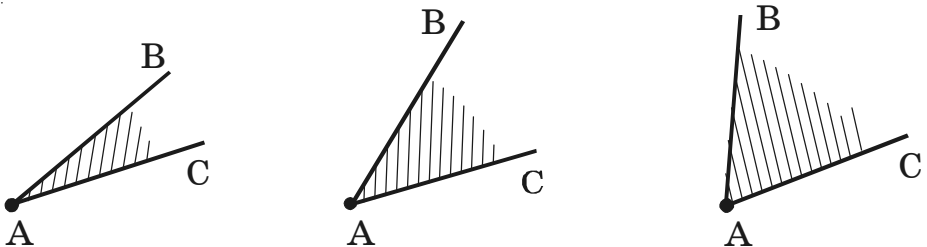
Впрочем, все эти углы нам сейчас не нужны. Будем рассматривать только один угол – угол ВАС. Я изобразю на чертеже три разных случая пересечения наших прямых.

Чем различаются эти случаи?

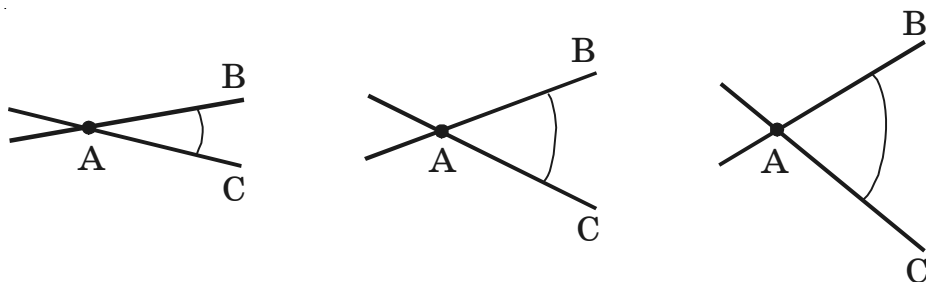


**Ученица:** Здесь прямые пересекаются под *разными* углами.

**Ученик:** Я понял: угол показывает нам, как именно произошло пересечение прямых! Как сильно оказались *раздвинутыми* пересекающиеся прямые! Ну, вроде того, как раскрывается веер! Он может быть *раскрыт* больше или меньше. На больший или на меньший угол.



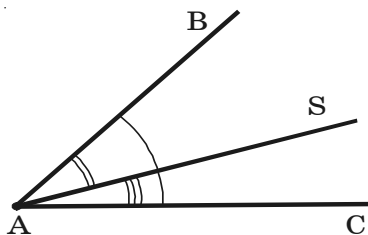
**Учитель:** Можно раздвинуть на какой-то угол руки. Можно раздвинуть на какой-то угол ножки циркуля. Более удобно показывать угол на чертеже не штриховкой, а при помощи дуги (кусочка окружности). Центр дуги (окружности) должен всякий раз совпадать с вершиной угла.



**Ученик:** Конечно, углы рождаются при пересечении прямых друг с другом. Но можно, наверное, предложить и другие способы рождения углов! Вот был у нас угол BAC. А я взял да провёл луч AS. И теперь у нас есть не только угол BAC, но ещё и углы BAS и SAC.

**Учитель:** Весьма интересное соображение. Давайте рассмотрим чертёж. В каких отношениях находятся друг с другом углы BAC, BAS и SAC?

**Ученица:** Что значит «в каких отношениях»?



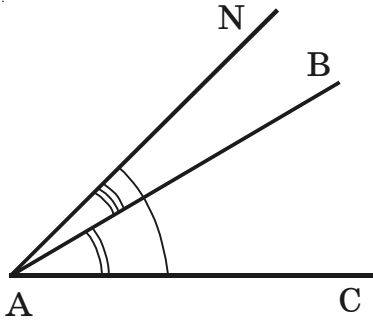
**Учитель:** Из чертежа следует, что углы BAS и SAC *меньше* угла BAC:

$$\angle BAS < \angle BAC; \angle SAC < \angle BAC.$$

Кроме того,

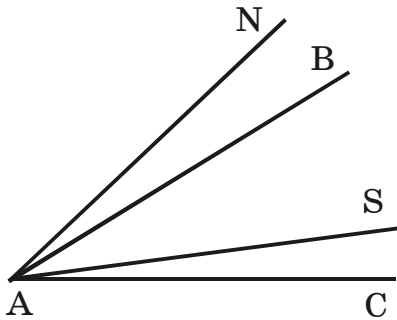
$$\angle BAS + \angle SAC = \angle BAC; \angle BAC - \angle BAS = \angle SAC;$$

$$\angle BAC - \angle SAC = \angle BAS.$$



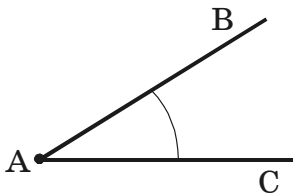
1.1

Перенеси чертёж в Рабочую тетрадь. Запиши, в каких отношениях находятся друг с другом углы  $\text{BAC}$ ,  $\text{NAB}$ ,  $\text{NAC}$ .

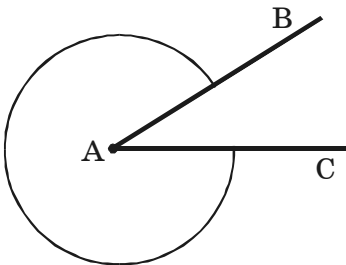


1.2

Перенеси чертёж в Рабочую тетрадь. Какие углы ты видишь на этом чертеже? Запиши, в каких отношениях находятся они друг с другом.



**Ученик:** Вообще-то непонятно, зачем на чертежах надо обязательно показывать углы с помощью дуг. Достаточно указать для угла три буквы – одну при вершине и две у сторон.



**Учитель:** Этого не всегда достаточно. Ведь два луча, выходящие из одной точки, задают не *один*, а *два* разных угла! Вот, прошу убедиться.

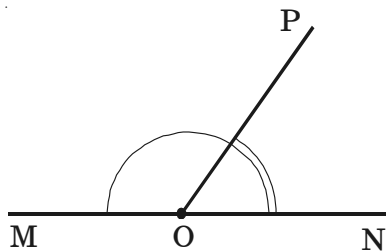
**Ученик:** С верхним углом все ясно. А вот насчет нижнего угла... Разве и такие углы бывают?

**Учитель:** По-видимому, пришло время выяснить, какие бывают углы.

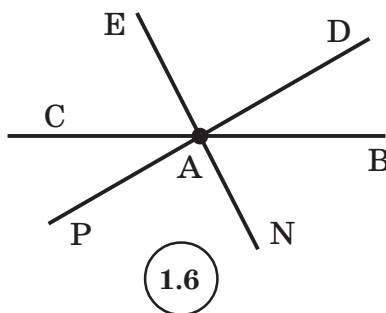
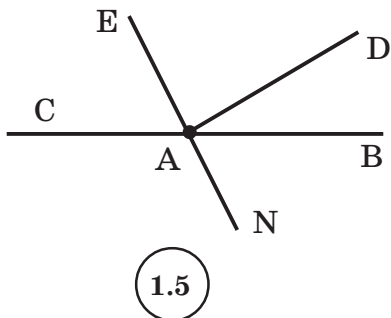
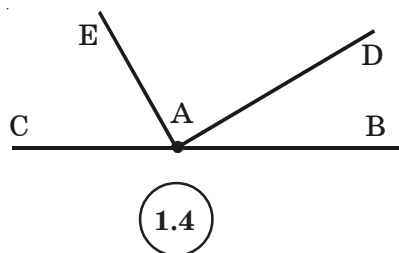
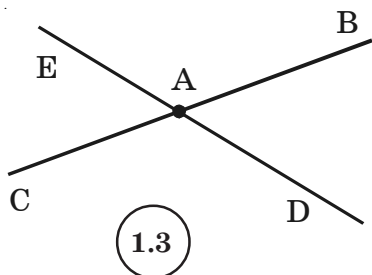
## 1.2. Какие бывают углы?

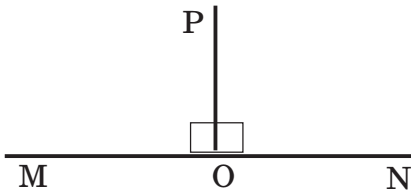
Два угла называются **смежными**, если у них есть **общая сторона**, а две другие составляют **прямую линию**.

Углы  $MOP$  и  $PON$  на чертеже – **смежные** ( $OP$  – общая сторона, стороны  $OM$  и  $ON$  составляют прямую линию).



Вот четыре чертежа, где имеются пары смежных смежных углов. Найди эти пары и запиши соответствующие углы в Рабочей тетради.

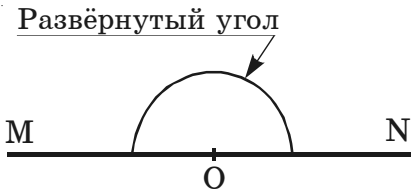




Если смежные углы равны другу, то, значит, каждый из них есть прямой угол.

На чертеже углы  $MOP$  и  $PON$  – прямые углы. Луч  $OP$  является *перпендикуляром* к прямой  $MN$ .

Это записывают так:  $OP \perp MN$ . Чтобы убедиться, что  $\angle MOP = \angle PON$ , надо аккуратно перегнуть данную страницу учебника по линии  $OP$ . Посмотрев перегнутый лист на свет, можно убедиться, что луч  $OM$  совпал с лучом  $ON$ .



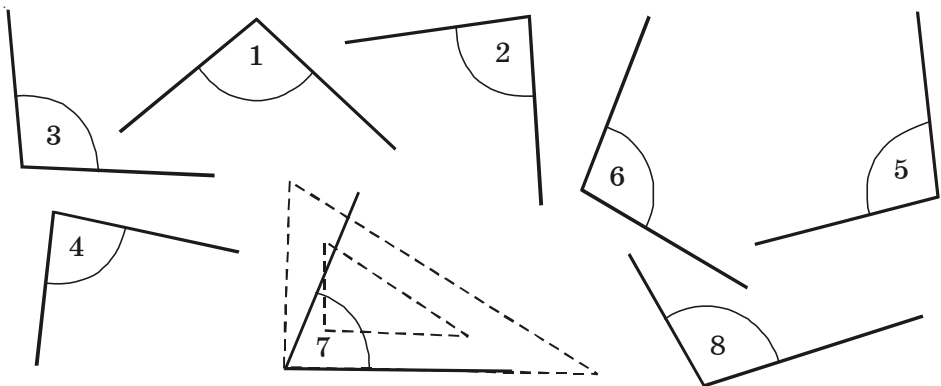
Сумма двух прямых углов образует **развёрнутый** угол. Это угол, стороны которого составляют прямую. На чертеже угол  $MON$  – **развёрнутый** угол.

Углы, меньше прямого угла, называются острыми.

Углы, больше прямого угла, но меньше развёрнутого, называются тупыми.

Чтобы определить на практике, каким является тот или иной угол (острым или тупым), можно воспользоваться чертёжным треугольником, который надо приложить к углу.

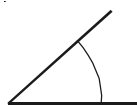
- 1.7 Используя чертёжный треугольник, определи, какие из углов острые, а какие – тупые (углы для удобства обозначены числами). Острые углы закрась красным карандашом, а тупые – жёлтым.



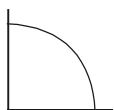
Углы, больше развёрнутого, называются выпуклыми.

Угол, стороны которого совпадают, называют полным.

Все эти углы (острые, прямой, тупые, развёрнутый, выпуклые, полный) удобно продемонстрировать, постепенно раскрывая веер:



Один из острых углов



Прямой угол



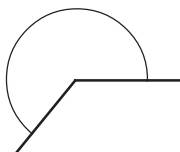
Один из тупых углов



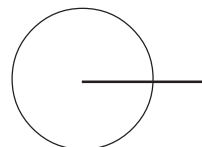
Развёрнутый угол



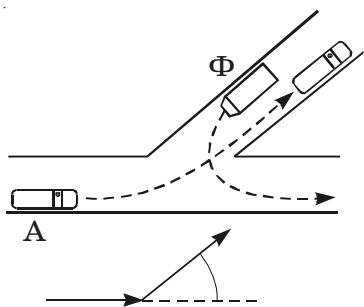
Один из выпуклых углов



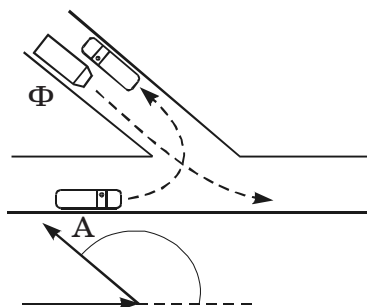
Полный угол



1.8 Рассмотрите внимательно рисунок:



Легковой автомобиль совершил поворот на острый угол.



Легковой автомобиль совершил поворот на тупой угол.

Как ты думаешь, на какой угол (острый или тупой) совершает поворот фургон  $\Phi$  в каждом из изображённых здесь случаев?